LE GROUPE DE BRAUER III : EXEMPLES ET COMPLEMENTS

par Alexander Grothendieck

Le présent exposé continue les deux exposés " Le Groupe de Brauer I, II " (Séminaire Bourbaki, n$^{\text{os}}$ 290 et 297), cités dans la suite GB I et GB II .

1. Corps de dimension $\leqslant 1$.

Rappelons [31] qu'un corps K est dit <u>de dimension</u> $\leqslant 1$ si pour toute extension finie K' de K , on a $Br(K') = 0$. Pour diverses caractérisations équivalentes de ces corps, cf. [31, II 3.1]. Notons seulement que cette condition implique que la dimension cohomologique $cd(K)$ de K (toujours sous-entendu : pour la topologie étale et des coéfficients de torsion) est $\leqslant 1$, et la réciproque est vraie si K est de caractéristique nulle (loc. cit.) ; dans le cas général, on peut dire seulement que si ℓ est un nombre premier distinct de car K , alors la relation $cd_{\ell}(K) \leqslant 1$ équivaut à la condition suivante : pour toute extension finie (ou plus généralement, algébrique) K' de K , $Br(X)(\ell)$ (= composante ℓ -primaire du groupe de Brauer $Br(X)$) est nul [31, II 2.3] . D'autre part, un corps K est dit (C_1) si toute forme à coefficients dans K , à n variables et de degré $d < n$, admet un zéro non trivial dans K . Un tel corps est de dimension $\leqslant 1$ [31, II 3.2] . Rappelons alors les théorèmes de TSEN et de LANG [23] :

1) (TSEN) : soient k un corps algébriquement clos, K une extension de k de degré de transcendance 1, alors K est (C_1) .

2) (LANG) : soient V un anneau de valuation discrète hensélien à corps résiduel k algébriquement clos, K le corps des fractions de V, alors K est (C_1), du moins si V est <u>excellent</u>, i.e. si le corps des fractions $\hat{K}$ de $\hat{V}$ est séparable sur K (*).

On en conclut donc :

<u>Théorème (1.1). Soit</u> K <u>un corps du type défini dans</u> 1) <u>ou</u> 2) <u>ci-dessus. Alors</u> $Br(K) = 0$, <u>plus généralement, pour tout</u> $i \neq 0$, <u>on a</u> $H^i(K,\underline{G}_m) = 0$.

La dernière assertion, pour $i \geqslant 3$, résulte par exemple de [31, I 3.2] .

<u>Corollaire (1.2). Soit</u> X <u>une courbe algébrique sur un corps</u> k <u>algébriquement clos, alors</u> $Br(X) = 0$.

En effet, si η est un point maximal de X , on conclut de (1.1) que $Br(k(\eta)) = 0$, et par suite on a $Br(X) = 0$ en vertu de (BR II 1.8).

1.2.1. Notons que lorsque dans (1.1) ci-dessus, on remplace l'hypothèse que le corps de base resp. résiduel k soit algébriquement clos par celle que ce corps soit séparablement clos, les conclusions

(*) Cf. "Compléments" p. 101.

(1.1), (1.2) tombent en défaut, du moins si on suppose que k est de caractéristique $p > 0$: dans ce cas, en effet, $Br(K)$ peut être un groupe de p-torsion non nul, et en particulier $Br(k[t])$ n'est nul que si k est parfait, donc algébriquement clos [7, 7.5]. Cependant :

Corollaire (1.3). Sous les conditions 1) ou 2) ci-dessus, mais supposant seulement k séparablement clos, on a $cd_{\ell}(K) = 1$ pour tout nombre premier $\ell \neq$ car k, et par suite on a (par la suite exacte de Kummer) :

$$H^i(K,\underline{G}_m)(\ell) = 0 \quad \text{pour} \quad i \geqslant 1 \quad \text{, en particulier } Br(K)(\ell)=0 \quad .$$

D'ailleurs, manifestement pour l'assertion $cd_{\ell}(K) \leqslant 1$ la restriction $\ell \neq p$ n'est nécessaire ici que dans le cas 2), et dans le cas d'inégales caractéristiques (dans le premier cas, la dimension cohomologique n'est pas changée si on étend le corps de base à la clôture algébrique $\bar{k}$; dans le deuxième, on applique le fait que $cd_p(K) \leqslant 1$ si car $K = p > 0$ [31, II 2.2]). Pour le cas 2), cf. [4, X 2.3].

Remarque (1.4). En fait, la démonstration du cas 2) dans (1.3) prouve ceci : soit A un anneau strictement local (i.e. hensélien à corps résiduel séparablement clos) noethérien et de dimension 1, de corps résiduel k, d'anneau total des fractions K, alors pour tout nombre premier $\ell \neq$ car.K, on a $cd_{\ell}(K) \leqslant 1$, d'où $H^i(K,\underline{G}_m)(\ell) = 0$ pour $i \geqslant 1$, et en particulier $Br(K)(\ell) = 0$.

Rappelons aussi le théorème de CHEVALLEY [10] : <u>un corps fini est</u> (C_1) . On en conclut donc l'énoncé suivant, qui est d'ailleurs classique sous la forme du théorème de WEDDERBURN [§ 11, n° 1, th. 1]: <u>tout corps gauche fini est commutatif</u>. En termes de groupe de Brauer :

<u>Proposition (1.5)</u>. <u>Si</u> K <u>est un corps fini</u>, <u>on a</u> $Br(K) = 0$, <u>d'où</u> $H^i(K,G_m) = 0$ <u>pour tout</u> $i \geqslant 1$.

2. Schémas de dimension 1 .

Soit X un préschéma localement noethérien de dimension $\leqslant 1$, et soit S le schéma somme des $\mathrm{Spec}(k(\eta))$, où η parcourt les points maximaux de X , $i : S \longrightarrow X$ le morphisme canonique. Utilisant (1.4), on trouve

$$R^n i_*(\underline{G}_{m\,S}) = 0 \quad \text{pour} \quad i > 0 \ , \tag{2.1}$$

du moins si les corps résiduels en les points fermés non isolés de X sont parfaits ; sinon, il reste vrai que pour tout nombre premier ℓ distinct des caractéristiques résiduelles de X , les $R^n i_*(\underline{G}_{m\,S})$ (qui sont de torsion pour $n \geqslant 1$ en vertu de (BR II 1.5)) ont pour $n \geqslant 1$ une composante ℓ-primaire nulle. Il en résulte, par la suite spectrale de Leray pour i :

$$H^n(X,\underline{R}^*_X) \xrightarrow{\sim} H^n(S,\underline{G}_{m\,S}) \ , \tag{2.2}$$

avec le grain de sel analogue si on ne suppose pas les corps résiduels des points fermés de X parfaits ; on a posé

$$\underline{R}_X^* = i_*(\underline{G}_{m\ S}) = \text{faisceau des fonctions rat. inversibles}$$

sur X . Utilisant la suite exacte (BR II 1. (2)), on en conclut une suite exacte infinie :

$$(2.3) \quad \ldots \to H^i(X,\underline{G}_m) \to H^i(S,\underline{G}_m) \to H^i(X,\underline{\mathrm{Div}}_X) \to H^{i+1}(X,\underline{G}_m) \to \ldots,$$

modulo le grain de sel habituel, où $\underline{\mathrm{Div}}_X$ désigne le faisceau des diviseurs (de Cartier) sur X . Compte tenu de la structure discrète de ce dernier faisceau, (BR II 1. (3 bis)), on peut écrire d'ailleurs, si X est noethérien :

$$(2.4) \qquad H^i(X,\underline{\mathrm{Div}}_X) = \overline{\sum_{x \in X^{(1)}}} H^i(x,\underline{\mathrm{Div}}_{X,x}) \quad ,$$

où $X^{(1)}$ désigne l'ensemble des points (fermés) de codimension 1 dans X , et $\underline{\mathrm{Div}}_{X,x}$ la restriction de $\underline{\mathrm{Div}}_X$ à $x = \mathrm{Spec}(k(x))$.

Lorsque X est régulier, alors $\underline{\mathrm{Div}}_{X,x}$ n'est autre que le faisceau constant $\underline{Z}$ sur x . Utilisant la suite exacte

$$0 \to \underline{Z} \to \underline{Q} \to \underline{Q}/\underline{Z} \to 0 \quad ,$$

et le fait que $H^i(x,\underline{Q}) = 0$ pour $i > 0$, on trouve

$$(2.5) \qquad H^i(x,\underline{Z}) \xleftarrow{\sim} H^{i-1}(x,\underline{Q}/\underline{Z}) \quad \text{pour } i \geqslant 2 \quad ,$$

d'autre part (BR II 1.9) on a

$$(2.5\text{ bis}) \qquad H^1(x,\underline{Z}) = 0 \quad .$$

Mettant ensemble les renseignements obtenus, on trouve :

<u>Proposition (2.1)</u>. <u>Soient</u> X <u>un préschéma noethérien régulier intègre de dimension</u> 1, η <u>son point générique</u>, $X^{(1)}$ <u>l'ensemble des points fermés de</u> X . <u>Si pour tout</u> $x \in X^{(1)}$, $k(x)$ <u>est parfait</u>, <u>on a une suite exacte infinie</u> :

$$0 \longrightarrow H^2(X,\underline{G}_m) \longrightarrow H^2(\eta,\underline{G}_m) \longrightarrow \coprod_{x \in X^{(1)}} H^1(x,\underline{Q}/\underline{Z}) \rightarrow H^3(X,\underline{G}_m) \longrightarrow$$
$$\longrightarrow H^3(\eta,\underline{G}_m) \longrightarrow \cdots$$

<u>La conclusion reste valable</u>, <u>sans hypothèse sur les corps résiduels</u>, <u>pour les composantes</u> ℓ <u>-primaires des groupes envisagés</u>, <u>pour tout nombre premier</u> ℓ <u>distinct des caractéristiques résiduelles de</u> X .

Supposons par exemple que X soit le spectre d'un anneau de valuation discrète hensélien A , de sorte que $X^{(1)}$ est réduit à l'unique point fermé x de X . On vérifie (grâce à l'hypothèse hensélienne sur A) que pour tout préschéma en groupes commutatif et <u>lisse</u> G sur X , on a

(2.6) $$H^i(X,G) \xrightarrow{\sim} H^i(x,G) \quad ,$$

(ce qui, pour $i = 2$ et $G = \underline{G}_m$, n'est autre essentiellement que le théorème de AZUMAYA (BR I 6.1)). On trouve donc :

<u>Corollaire (2.2)</u>. <u>Soit</u> A <u>un anneau de valuation discrète hensélien</u>, <u>de corps résiduel</u> k , <u>corps des fractions</u> K . <u>Si</u> k <u>est parfait</u>, <u>on a une suite exacte infinie</u> (*) :

$$0 \rightarrow H^2(k,\underline{G}_m) \rightarrow H^2(K,\underline{G}_m) \rightarrow H^1(k,\underline{Q}/\underline{Z}) \rightarrow H^3(k,\underline{G}_m) \rightarrow H^3(K,\underline{G}_m) \rightarrow H^2(k,\underline{Q}/\underline{Z}) \rightarrow$$
$$\longrightarrow \cdots$$

(*) Cf. le complément donné p. 101.

La conclusion reste valable, sans hypothèse sur k *, pour les composantes* ℓ *-primaires des groupes envisagés, pour tout nombre premier* ℓ *distinct de la caractéristique de* k .

Les deux premiers termes de cette suite exacte ne sont autres que $Br(k)$ et $Br(K)$, le troisième est le dual $Hom(\pi_1(k), \underline{Q}/\underline{Z})$ du groupe fondamental $\pi_1(k)$ de k . Lorsque k est fini, on a $Br(k) = 0$ par (1.5), et $\pi_1(k) = \underline{Z}$ (isomorphisme canonique défini par la substitution de Frobénius). On en conclut donc le résultat suivant, classique dans la théorie du *corps de classes local* :

Corollaire (2.3). Soit A *un anneau de valuation discrète hensélien, à corps résiduel fini* k *, et soit* K *son corps des fractions. Alors on a un isomorphisme canonique*

$$Br(K) \simeq \underline{Q}/\underline{Z} \quad .$$

Soit maintenant K un corps de nombres algébriques i.e. une extension finie du corps $\underline{Q}$, et soit P l'ensemble des "places" (finies ou infinies) de K . Comme d'habitude, pour tout $\underline{p} \in P$, on désigne par $K_{\underline{p}}$ le complété de K en $\underline{p}$, de sorte qu'on obtient un homomorphisme canonique

$$(2.7) \qquad Br(K) \longrightarrow \sum_{\underline{p} \in P} Br(K_{\underline{p}}) \quad .$$

Pour $\underline{p}$ fini, le calcul de $Br(K_{\underline{p}})$ est fait dans (2.3), on trouve $\underline{Q}/\underline{Z}$; pour $\underline{p}$ infini, on trouve 0 si $K_{\underline{p}} \simeq \underline{C}$, et $\underline{Z}/2\underline{Z}$ si $K_{\underline{p}} = \underline{R}$: en effet, on a

$$(2.8) \qquad Br(\underline{R}) = \underline{Z}/2\underline{Z} \quad ,$$

par le théorème de Frobénius [8, par. 11, n° 2, th. 2]. La théorie du corps de classe [3] nous apprend d'autre part que (2.7) <u>est injectif</u>, et que son image est formée des $(\xi_{\underline{p}})_{\underline{p} \in P}$ tels que $\sum_{\underline{p}} \xi_{\underline{p}} = 0$, où la somme $\sum_{\underline{p}} \xi_{\underline{p}}$ est définie comme un élément de $\underline{Q}/\underline{Z}$, en identifiant les $\mathrm{Br}(\underline{K}_p)$ soit à $\underline{Q}/\underline{Z}$, soit à un sous-groupe de $\underline{Q}/\underline{Z}$ de la façon indiquée. Soit maintenant A l'anneau des entiers de K, et $X = \mathrm{Spec}(A)$; alors les éléments de $X^{(1)}$ correspondent biunivoquement aux places finies de K. Conjuguant (2.1) et les résultats de la théorie du corps de classes qu'on vient de rappeler, on trouve :

<u>Proposition (2.4)</u>. <u>Soient</u> K <u>un corps de nombres</u>, X <u>le spectre de son anneau des entiers</u>. <u>Alors</u> $\mathrm{Br}(X)$ <u>est un groupe de</u> 2 <u>-torsion fini</u>, <u>isomorphe à</u> $(\underline{Z}/2\underline{Z})^r$, <u>où</u> $r = \mathrm{Max}(0,s-1)$, s <u>étant le nombre de places réelles de</u> K. <u>En particulier</u>, <u>si</u> K <u>est purement imaginaire</u>, <u>ou n'a qu'une seule place réelle</u> (<u>et dans ces cas</u> seulement), on a $\mathrm{Br}(X) = 0$.

En particulier, on a $\mathrm{Br}(\mathrm{Spec}(\underline{Z})) = 0$.

<u>Remarques (2.5)</u>.

a) On peut également calculer les $H^i(X,\underline{G}_m)$ [5] : ainsi, si K est purement imaginaire, on trouve

$$H^i(X,\underline{G}_m) = 0 \quad \text{pour} \quad i \neq 3 \quad , \quad H^3(X,\underline{G}_m) = \underline{Q}/\underline{Z} \quad ,$$

en conjuguant (2.1) et les résultats connus du corps de classes.

b) On a des résultats analogues pour une courbe régulière complète X sur un corps fini k , notamment

$$\mathrm{Br}(X) = 0 \quad , \quad H^3(X,\underline{G}_m) \simeq \underline{Q}/\underline{Z} \quad \text{si } X \text{ connexe,}$$

qu'on peut établir par la même méthode, en utilisant la théorie du corps de classes "géométrique". Donnons ici une démonstration directe ; on utilise la suite spectrale de Leray $E_2^{p,q} = H^p(k,R^q f_*(\underline{G}_m)) \Longrightarrow H^*(X,\underline{G}_m)$ pour le morphisme structural $f : X \longrightarrow \mathrm{Spec}(k)$, où ici $R^q f_*(\underline{G}_m) = 0$ pour $q \geqslant 2$, car en vertu de (2.1) et (1.1) on trouve $H^q(\bar{X},\underline{G}_m) = 0$ pour $q \geqslant 2$. On peut évidemment supposer X irréductible et $k = H^\circ(X,\underline{O}_X)$ donc $f_*(\underline{G}_m) = \underline{G}_{m\ k}$, et on aura, essentiellement par définition [16, V] $R^1 f_*(\underline{G}_m) = \underline{\mathrm{Pic}}_{X/k}$ restreint au site étale de k . On trouve donc une suite exacte infinie

$$(2.9) \quad \to H^n(k,\underline{G}_m) \to H^n(X,\underline{G}_m) \to H^{n-1}(k,\underline{\mathrm{Pic}}_{X/k}) \to H^{n+1}(k,\underline{G}_m) \to \cdots$$

(valable sans hypothèse sur le corps de base). Comme k est fini, on a $H^n(k,\underline{G}_m) = 0$ pour $n \geqslant 1$ par (1.5), d'où

$$(2.10) \qquad H^n(X,\underline{G}_m) \xrightarrow{\sim} H^{n-1}(k,\underline{\mathrm{Pic}}_{X/k}) \quad ,$$

ce qui (en vertu de $\mathrm{cd}(k) \leqslant 1$) implique $H^n(X,\underline{G}_m) = 0$ pour $n \geqslant 4$. D'autre part, on a une suite exacte canonique

$$(2.11) \qquad 0 \to \underline{\mathrm{Pic}}^\circ_{X/k} \to \underline{\mathrm{Pic}}_{X/k} \to \underline{Z}_k \longrightarrow 0 \quad ,$$

où $\underline{\mathrm{Pic}}^\circ_{X/k}$ est un groupe algébrique lisse et connexe sur k , d'où résulte par un théorème bien connu de LANG [24] que

$$(2.12) \qquad H^i(k,\underline{\mathrm{Pic}}^\circ_{X/k}) = 0 \quad \text{pour } i \geqslant 1 \quad ,$$

d'où par la suite exacte de cohomologie relative à (2.11)

(2.13) $$H^i(k,\underline{\mathrm{Pic}}_{X/k}) \xrightarrow{\sim} H^i(k,\underline{Z}) \quad \text{pour} \quad i \geqslant 1 \ ,$$

et par suite, d'après la structure connue du groupe fondamental du corps fini k , qui implique

(2.14) $$H^i(k,\underline{Z}) = 0 \quad \text{si} \quad i \neq 0,2 \quad , \quad H^2(k,\underline{Z}) \simeq H^1(k,\underline{Q}/\underline{Z}) \simeq \underline{Q}/\underline{Z} \ ,$$

la comparaison de (2.10), (2.13) et (2.14) donne $H^n(X,\underline{G}_m) = 0$ si $n = 2$, $\underline{Q}/\underline{Z}$ si $n = 3$, d'où pour conclure (ne supposant plus X irréductible) :

(2.15) $$H^n(X,\underline{G}_m) = 0 \quad \text{pour} \quad n \neq 0,3 \quad , \quad H^3(X,\underline{G}_m) \simeq (\underline{Q}/\underline{Z})^c \ ,$$

où c désigne l'ensemble des composantes irréductibles de X , et où le dernier isomorphisme est canoniquement défini. Observons que la même démonstration essentiellement établit encore (2.15) sans supposer la courbe complète X régulière ; il faut simplement dans (2.11) remplacer $\underline{Z}_k$ par un groupe $\underline{Z}_k{}^c$ tordu.

c) En liaison avec des conjectures de SWINNERTON-DYER et de TATE [32] [33] , M. ARTIN a soulevé la question s'il était vrai que pour tout schéma X <u>propre sur</u> $\mathrm{Spec}(\underline{Z})$, le groupe $\mathrm{Br}(X)$ est fini. C'est ce qu'on vérifie, grâce aux résultats qui précèdent, lorsque $\dim X \leqslant 1$. Mais déjà le cas [32] où X est une surface projective non singulière semble échapper aux moyens dont on dispose actuellement. Signalons cependant que des résultats récents de TATE (*) établissent la validité de cette conjecture lorsque X est une <u>variété abélienne définie sur un corps fini</u>, <u>ou un produit de courbes algébriques.</u>

(*) J. Tate, Endomorphisms of abelian varieties over finite fields, Inventiones Math. 2, 134-144 (1966).

3. Schémas fibrés de dimension 2 : Résultats locaux.

Le résultat-clef est le suivant :

Théorème (3.1). (M. ARTIN) : Soient $f : X \to Y$ un morphisme propre et plat, avec X régulier et de dimension 2 , Y spectre d'un anneau de valuation discrète hensélien japonais (EGA 0_{IV} 23.1.1), y le point fermé de Y , Z un sous-schéma de X dont l'ensemble sous-jacent soit égal à $f^{-1}(y)$. Alors l'homomorphisme canonique

$$Br(X) = H^2(X,\underline{G}_m) \longrightarrow Br(Z) = H^2(Z,\underline{G}_m)$$

est bijectif.

Notons que dans le cas envisagé ici, l'égalité entre les groupes de Brauer cohomologiques et géométriques résulte de (BR II 2.2), compte tenu que X est régulier de dimension 2 et Z de dimension 1. Notons tout de suite le corollaire suivant, qui est l'application principale de (3.1) :

Corollaire (3.2). Soit $f : X \to Y$ un morphisme propre et plat, avec X , Y localement noethériens et réguliers, Y de dimension 1 et les fibres de f de dimension 1. Supposons de plus les anneaux locaux de Y japonais. Alors on a

$$R^i f_*(\underline{G}_m) = 0 \qquad \text{pour } i \geqslant 2 .$$

Déduisons (3.2). Par le calcul habituel des $R^i f_*$ (SGA 4 VIII 5.2) on est ramené au cas où Y est strictement local, et à prouver alors $H^i(X,\underline{G}_m) = 0$ pour $i \geqslant 2$. Notons que le théorème de changement de base propre (SGA 4 XII 5.5) montre que pour tout faisceau de torsion F sur X, si F_o désigne sa restriction à la fibre fermée X_o, on a des isomorphismes de restriction

$$H^i(X,F) \xrightarrow{\sim} H^i(X_o,F_o) .$$

Compte tenu que $\dim X_o = 1$, le deuxième membre est nul si $i > 2$, et même si $i > 1$ lorsque F donc F_o est de p-torsion, où $p = \mathrm{car}\, k$ (k le corps résiduel) (SGA 4 X, 4.3 et 5.2) ; donc on a

$$\mathrm{cd}(X) \leqslant 2 \quad , \text{ et } \quad \mathrm{cd}_p(X) \leqslant 1 \quad ,$$

où cd désigne la dimension cohomologique. Les relations $H^i(X,\underline{G}_m) = 0$ pour $i \geqslant 3$ résultent maintenant du fait que ces groupes sont des groupes de torsion (BR II 1.4), et du :

Lemme (3.2.1). Soit X un préschéma, ℓ un nombre premier, n un entier tel que $\mathrm{cd}_\ell(X) \leqslant n$. Alors $H^i(X,\underline{G}_m)(\ell) = 0$ si $i > n+1$ (resp. si $i > n$, si ℓ est premier aux caractéristiques résiduelles de X).

Comme d'habitude, $M(\ell)$ désigne le sous-groupe formé des éléments de ℓ-torsion (i.e. annulés par une puissance de ℓ) du groupe abélien M. Lorsque ℓ est premier aux caractéristiques résiduelles, on utilise la suite exacte de cohomologie associée à la suite exacte de Kummer (BR II 3)

$$0 \longrightarrow \mu_{\ell^r} \longrightarrow \underline{G}_m \xrightarrow{x \mapsto x^{\ell^r}} \underline{G}_m \longrightarrow 0 \quad ;$$

lorsque on ne fait pas d'hypothèse sur ℓ, on introduit les faisceaux noyau et conoyau A , B de l'endomorphisme $x \mapsto x^{\ell^r}$ dans $\underline{G}_m$, qui sont des faisceaux de ℓ-torsion, ainsi que le faisceau image $\underline{G}'_m$ de cet endomorphisme, et on utilise les suites exactes de cohomologie associées aux suites exactes de faisceaux

$$0 \longrightarrow A \longrightarrow \underline{G}_m \longrightarrow \underline{G}'_m \rightarrow 0 \quad , \quad 0 \rightarrow \underline{G}'_m \rightarrow \underline{G}_m \longrightarrow B \longrightarrow 0 \quad .$$

Le lemme en résulte immédiatement.

Il reste à traiter le cas $i = 2$, i.e. à prouver

$$H^2(X,\underline{G}_m) = 0 \quad .$$

Notons que lorsque ℓ est un nombre premier $\neq$ car k , alors la relation

$$H^2(X,\underline{G}_m)(\ell) = 0$$

est facile et s'établit, comme le cas $i \geqslant 3$, sans référence à (3.1), et sans faire appel à l'hypothèse japonaise pour Y , ni à la régularité de X . Il suffit d'utiliser l'homomorphisme de suites exactes du type Kummer (BR II 3.1) induit par l'inclusion $X_o \longrightarrow X$:

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \longrightarrow & \mathrm{Pic}(X)\otimes \underline{Q}_\ell/\underline{Z}_\ell & \longrightarrow & H^2(X,\underline{\mu}_{\ell^\infty}) & \longrightarrow & H^2(X,\underline{G}_m)(\ell) & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \longrightarrow & \mathrm{Pic}(X_o)\otimes \underline{Q}_\ell/\underline{Z}_\ell & \longrightarrow & H^2(X_o,\underline{\mu}_{\ell^\infty}) & \longrightarrow & H^2(X_o,\underline{G}_m)(\ell) & \longrightarrow & 0
\end{array} ,$$

d'utiliser le fait que la flêche verticale médiane est bijective, et la première flêche verticale surjective (EGA IV 21.9.12) donc bijective, d'où résulte que la troisième flêche verticale est bijective. Or $H^2(X_o,\underline{G}_m) = 0$, comme il résulte de (1.2) lorsque k est algébriquement clos (et non seulement séparablement clos), et comme nous verrons plus bas (5.8) dans le cas général, utilisant le fait que X_o est propre, d'où $H^2(X,\underline{G}_m)(\ell) = 0$. (Notons que la même démonstration prouve l'assertion (3.1) pour les composantes ℓ -primaires des groupes envisagés, pour tout $\ell \neq \mathrm{car}\ k$, sans hypothèse japonaise sur Y ni de régularité sur X.) Pour prouver la même relation pour $\ell = \mathrm{car}\ k$, i.e. pour prouver que $H^2(X,\underline{G}_m) = 0$, on doit cependant faire appel à (3.1), qui nous dit que

$$H^2(X,\underline{G}_m) \xrightarrow{\simeq} H^2(X_o,\underline{G}_m) \quad ,$$

et utiliser la relation déjà invoquée $H^2(X_o,\underline{G}_m) = 0$.

Prouvons enfin (3.1). Posons $Y = \mathrm{Spec}(A)$, $Y_n = \mathrm{Spec}(A/\underline{m}^{n+1})$, $\underline{m}$ étant l'idéal maximal de A , $X_n = X\times_Y Y_n$. Donc pour n assez grand, on aura $Z \subset X_n$, et Z et X_n ont même ensemble sous-jacent, i.e. Z est défini par un Idéal nilpotent sur X_n . Un dévissage standard du faisceau $\underline{G}_{m\ X_n}$ en termes de $\underline{G}_{m\ Z}$ et de faisceaux cohérents additifs F sur Z , joint à la relation $H^i(Z,F)=0$ pour $i \geqslant 2$ pour un tel F (provenant de l'hypothèse $\dim Z \leqslant 1$, et de (SGA 4 VII 4.3)), prouve qu'on a

$$H^2(X_n,\underline{G}_m) \xrightarrow{\simeq} H^2(Z,\underline{G}_m) \quad ,$$

dès que $Z \subset X_n$. Appliquant ceci au cas $Z = X_o$, on voit que l'homomorphisme de restriction $H^2(Z,\underline{G}_m) \longrightarrow H^2(X_o,\underline{G}_m)$ est également bijectif. On peut donc, pour prouver (3.1), supposer

$$Z = X_o \quad .$$

Compte tenu du fait que les morphismes de transition $\mathrm{Br}(X_{n+1}) \rightarrow \mathrm{Br}(X_n)$

sont injectifs (en fait, bijectifs), l'injectivité de $Br(X) \to Br(X_o)$ est contenue dans le lemme suivant :

Lemme (3.3). Soit $f : X \to Y$ un morphisme propre et plat, avec Y spectre d'un anneau de valuation discrète hensélien japonais. Avec la notation habituelle X_n, supposons que le système projectif $(Pic(X_n))_{n \in \underline{N}}$ satisfasse la condition de Mittag-Leffler (EGA 0_{III} 13.1), par exemple que les morphismes de transition y soient surjectifs. Alors l'homomorphisme canonique

$$Br(X) \longrightarrow \varprojlim_n Br(X_n)$$

est injectif.

Soit $\underline{A}$ une algèbre d'Azumaya sur X, dont la classe dans $Br(X)$ est dans le noyau de l'application envisagée dans (3.3), i.e. telle que pour tout n, on ait un isomorphisme

$$(3.2) \qquad u_n : \underline{A}_n \simeq \underline{End}(\underline{V}_n) \quad ,$$

où $\underline{V}_n$ est un Module localement libre sur X_n. Un tel $\underline{V}_n$ n'est déterminé par $\underline{A}_n$ que modulo tensorisation par un Module inversible $\underline{L}_n$ sur X_n, mais utilisant la condition que $(Pic(X_n))_{n \in \underline{N}}$ satisfait la condition de Mittag-Leffler, on constate facilement qu'on peut choisir les $\underline{V}_n$, U_n de telle façon qu'ils forment un système projectif :

$$(3.3) \qquad \underline{V}_n \simeq \underline{V}_{n+1} \otimes_{\underline{O}_{X_{n+1}}} \underline{O}_{X_n} \quad ,$$

les isomorphismes (3.2) formant eux-mêmes un système projectif. Soit

$\hat{X}$= Spec(A) le complété de Y , et désignons par $\hat{X}$, $\hat{\underline{A}}$ ... les transformés de X, $\underline{A}$ ... par le changement de base $\hat{Y} \longrightarrow Y$. Compte tenu de (EGA III 5.1.4), la donnée d'un tel système de $(\underline{V}_n, u_n)$ revient à la donnée d'un Module localement libre $\hat{\underline{V}}$ sur $\hat{X}$, et d'un isomorphisme

$$(3.3) \qquad \hat{u} : \hat{\underline{A}} \xrightarrow{\simeq} \underline{\mathrm{End}}\,(\hat{\underline{V}}) \ .$$

Lorsque $Y = \hat{Y}$ (cas complet), la démonstration est terminée. Dans le cas général, il faut faire attention qu'on ne sait pas même, avec la construction précédente, si $\hat{\underline{V}}$ provient d'un Module $\underline{V}$ sur X . Cependant, il existe certainement un Module localement libre $\underline{E}$ sur X , tel qu'il existe un <u>épimorphisme</u>

$$\hat{\underline{E}} \longrightarrow \hat{\underline{V}} \ ;$$

en effet, choisissant une immersion projective pour X (il en existe, comme l'a remarqué LICHTENBAUM), d'où un faisceau $\underline{O}_X(1)$ inversible ample sur X , on sait qu'il suffit de prendre une somme directe de faisceaux $\underline{O}_X(-N)$, avec N assez grand, en vertu du "théorème A" de Serre (EGA III 2.2.1). Considérons maintenant, pour un préschéma Y' sur Y variable, le foncteur contravariant $F : (\mathrm{Sch})^{\circ}_{/Y} \longrightarrow (\mathrm{Ens})$, défini par

> $F(Y')$ = ensemble des couples $(\underline{V}', \phi')$, où V' est un Module quotient localement libre de $\underline{E}' = \underline{E} \otimes_Y Y'$, et ϕ' un isomorphisme $\underline{A}' = \underline{A} \otimes_Y Y' \xrightarrow{\sim} \underline{V}'$.

Utilisant la platitude et la propreté de f , et une technique standard reposant sur (EGA III 7.7.6) (comparer la démonstration dans

(SGA4 XIII 1)), on trouve que le foncteur F est <u>représentable</u> par un schéma de type fini sur Y , que nous noterons encore F . La donnée (3.3) ci-dessus s'interprète alors comme un élément de $F(\hat{Y})$. Or un théorème de GREENBERG [13] nous dit (sous une forme un peu plus précise d'ailleurs) que si F est un préschéma de type fini sur le spectre Y d'un anneau de valuation discrète <u>hensélien et japonais</u>, alors tout point de F à valeurs dans $\hat{Y}$ peut s'approcher par des points à valeurs dans Y , a fortiori $F(\hat{Y}) \neq \emptyset$ implique $F(Y) \neq \emptyset$. Cela prouve donc en l'occurence que $\underline{A}$ est isomorphe à une Algèbre de la forme $\underline{\mathrm{End}}(\underline{V})$, $\underline{V}$ Module localement libre sur X , et achève la démonstration de (3.3).

L'assertion de surjectivité dans (3.1) se démontre de façon toute analogue. Partant d'un élément de $\mathrm{Br}(X_o)$, représenté par une Algèbre d'Azumaya $\underline{A}_o$, on remonte de proche en proche $\underline{A}_o$ en des Algèbres d'Azumaya $\underline{A}_n$ sur les X_n , ce qui est possible, les obstructions aux relèvements consécutifs se trouvant dans des $H^2(X_o, ..)$, qui sont nuls puisque $\dim X_o = 1$. On trouve ainsi une Algèbre d'Azumaya $\hat{\underline{A}}$ sur $\hat{X}$. Choisissons un Module localement libre $\underline{E}$ sur X tel qu'il existe un épimorphisme $\hat{\underline{E}} \longrightarrow \hat{\underline{A}}$, et considérons le foncteur $(\mathrm{Sch})^o_{/Y} \longrightarrow (\mathrm{Ens})$ défini par $F(Y')$ = ensemble des couples $(\underline{B}',p')$, où $\underline{B}'$ est un Module quotient localement libre des $\underline{E} \otimes_Y Y'$ et p' une loi de multiplication sur $\underline{B}'$ qui en fait une Algèbre d'Azumaya. On constate alors que F est représentable par un préschéma localement de type fini sur Y , et comme le point de $F(y)$ défini par $\underline{A}_o$ se remonte par construction en un point de $F(\hat{Y})$, le théorème de GREENBERG déjà invoqué nous assure qu'il se remonte aussi en un point de $F(Y)$, ce qui achève la démonstration.

Remarques (3.4).

a) Lorsqu'on se borne à énoncer (3.1) pour les groupes Br (à l'exclusion des H^2), la démonstration est valable sans supposer X régulier (la régularité n'a servi qu'à assurer l'identité de $Br(X)$ avec $H^2(X,\underline{G}_m)$, et vaut également sans supposer Y de valuation discrète, lorsqu'on dispose pour Y d'un énoncé du type Greenberg (démontré pour l'instant seulement en dimension 1). Il est possible d'ailleurs que (3.3) (donc (3.1) et (3.2)) soient valables également sans hypothèse japonaise sur Y , et que plus généralement pour tout schéma X propre sur le spectre Y d'un anneau local noethérien hensélien, l'application $Br(X) \longrightarrow \varprojlim_n Br(X_n)$ soit injective. (Même si Y est complet, cette assertion n'est prouvée que lorsque X est plat sur Y , et moyennant l'hypothèse supplémentaire du type Mittag-Leffler.) On pourrait se poser la même question pour les applications $H^i(X,\underline{G}_m) \longrightarrow \varprojlim_n H^i(X_n,\underline{G}_m)$, et la réponse est en tout cas affirmative pour $i = 0$, et pour $i = 1$ moyennant de légères restrictions (par exemple Y complet, ou X plat sur Y et Y hensélien excellent de valuation discrète, ce qui permet d'appliquer le résultat cité de GREENBERG). Mais comme me l'a fait observer RAYNAUD, la réponse est négative déjà pour $i = 2$, même si Y est le spectre d'un anneau de valuation discrète complet et X est un schéma normal, plat et projectif sur Y , de dimension relative 1 : en effet, dans ce cas

$$\varprojlim H^2(X_n,\underline{G}_m) = H^2(X_o,\underline{G}_m) = Br\ (X_o) = Im\ Br(X)$$

d'après la fin de la démonstration de (3.1) (où l'hypothèse de régularité sur X n'a pas été utilisée), donc si

$$H^2(X,\underline{G}_m) \longrightarrow \varprojlim_n H^2(X_n,\underline{G}_m) \simeq Br(X_o)$$

était injectif, comme son composé avec l'injection $Br(X) \to H^2(X,\underline{G}_m)$ est surjectif, cette dernière serait également surjective ; or on a signalé (BR II 1.11 b)) que l'on peut trouver une surface algébrique normale X , sur un corps algébriquement clos de caractéristique quelconque, pour laquelle $Br(X) \longrightarrow H^2(X,\underline{G}_m)$ n'est pas surjective (le conoyau étant un groupe qui n'est pas de torsion, ni de type fini ...). Il est alors facile de voir qu'on peut (en modifiant au besoin X) supposer que X est projective et munie d'un morphisme dominant sur une courbe algébrique non singulière Y , d'où l'exemple annoncé. Notons cependant que la même question d'injectivité se pose également pour l'application $H^1(X,G) \longrightarrow \varprojlim_n H^1(X_n,G)$, lorsque G est un préschéma en groupes lisse non nécessairement commutatif sur X , et se résoud d'ailleurs par l'affirmative, essentiellement par la démonstration d'Artin qu'on vient de donner, lorsque X est plat sur Y et si de plus, ou bien G est affine sur X (ce qui permettra d'appliquer (EGA III 7.7.6)), ou bien G est quasi-projectif sur X et X projectif sur Y (ce qui permettra d'appliquer la théorie des "schémas de Hilbert"), pour assurer le résultat de représentabilité dont on a besoin.

b) Ecrivant la suite exacte infinie déduite de la suite spectrale de Leray pour le faisceau $\underline{G}_m$ et le morphisme f , en utilisant (3.2), et l'homomorphisme de cette suite exacte dans la suite exacte analogue associée au morphisme $f_o : X_o \longrightarrow y$, et tenant compte que $H^i(X,\underline{G}_m) \longrightarrow H^i(X_o,\underline{G}_m)$ est bijectif pour $i \geqslant 2$ (pour $i \geqslant 3$, ceci résulte encore de la suite exacte de Kummer et du théorème de changement de base) et que $H^i(Y,\underline{G}_m) \longrightarrow H^i(y,\underline{G}_m)$ est bijectif pour $i \geqslant 1$ (11.7), on trouve comme corollaire du théorème d'Artin le fait que les homomorphismes

$$H^i(Y,R^1f_*(\underline{G}_m)) \longrightarrow H^i(y,R^1f_{o*}(\underline{G}_m))$$

sont des isomorphismes pour $i \geqslant 1$.

4. Schémas de dimension 2 : Comparaison avec le groupe de Tate-Chafarévitch.

La lecture du présent numéro, assez long et technique, n'est pas nécessaire pour la compréhension des numéros suivants.

Nous présentons ici, sous une forme légèrement généralisée, des résultats de M. ARTIN et J. TATE, comparer [32] . Soit

$$f : X \longrightarrow Y$$

un morphisme propre et plat, avec Y régulier intègre de dimension 1, X régulier de dimension 2. Nous supposerons les anneaux locaux de Y excellents ; lorsqu'on abandonne cette hypothèse, les résultats qui suivent restent en tous cas valables, à condition de se borner aux ℓ -composantes des groupes de torsion envisagés, où ℓ est distinct des caractéristiques résiduelles de Y . Compte tenu de (3.2), la suite spectrale de Leray pour f et le faisceau étale $\underline{G}_{m\,X}$ fournit une suite exacte infinie

(4.1) $H^i(Y,f_*(\underline{G}_m)) \longrightarrow H^i(X,\underline{G}_m) \longrightarrow H^{i-1}(Y,R^1f_*(\underline{G}_m)) \dashrightarrow H^{i+1}(Y,f_*(\underline{G}_m))$

que nous allons étudier en basses dimensions pour l'étude de $H^2(X,\underline{G}_m) = Br(X)$. Nous supposons vérifiée l'hypothèse

(4.2) $$f_*(\underline{O}_X) \xleftarrow{\sim} \underline{O}_Y \quad ,$$

(qui est dans la nature d'une hypothèse de normalisation, car si elle n'est pas satisfaite, on s'y ramène en remplaçant Y par $\mathrm{Spec}(f_*(\underline{O}_X))$). On aura alors

(4.2 bis) $$f_*(\underline{G}_{m\ X}) = \underline{G}_{m\ Y} \quad ,$$

et nous poserons

(4.3) $$R^1f_*(\underline{G}_{m\ X}) = P = \underline{\mathrm{Pic}}_{X/Y} \quad ;$$

la notation $\underline{\mathrm{Pic}}_{X/Y}$ est compatible d'ailleurs avec la notation introduite dans [16] pour l'étude du foncteur de Picard, comme nous verrons plus bas (5.1). Ici, (4.3) nous servira de définition de ce symbole, et nous écrirons par conséquent

(4.4) $$\mathrm{Pic}(X/Y) = H^0(Y,P) = H^0(Y,R^1f_*(\underline{G}_{m\ X})) \quad ,$$

et nous utiliserons les notations analogues quand Y est remplacé par un Y' étale (ou préétale) sur Y . Ecrivant Pic et Br pour les H^1 et H^2 à coefficients dans $\underline{G}_m$, la suite exacte (4.1) peut se réécrire sous la forme

(4.5) $$0 \to \mathrm{Pic}(Y) \to \mathrm{Pic}(X) \to \mathrm{Pic}(X/Y) \to \mathrm{Br}(Y) \to \mathrm{Br}(X) \to H^1(Y,P) \to$$
$$\to H^3(Y,\underline{G}_m) \to H^3(X,\underline{G}_m) \quad ,$$

que nous écrirons sous la forme

(4.6) $$0 \to S \to Br(Y) \to Br(X) \to H^1(Y,P) \to T \to 0 \quad ,$$

ou encore

(4.6 bis) $$0 \to Br(X)/\mathrm{Im}\, Br(Y) \to H^1(Y,P) \to T \to 0 \quad ,$$

avec

(4.7) $$S = \mathrm{Coker}(\mathrm{Pic}(X) \to \mathrm{Pic}(X/Y)),\ T = \mathrm{Ker}(H^3(Y,\underline{G}_m) \to H^3(X,\underline{G}_m)) \ .$$

Nous allons montrer que dans des cas fréquents, S et T sont des groupes finis, voire nuls, et expliciter $H^1(Y,P)$ en termes du classique groupe de Tate-Chafarévitch de la jacobienne de la fibre générique X_η de X .

Introduisons quelques entiers liés à la situation. Notons que pour tout diviseur D sur X_η , et plus généralement pour tout élément ξ de $\mathrm{Pic}(X_\eta/\eta)$, on définit son degré $\deg(D)$ resp. $\deg(\xi)$ sur k . Si ξ est un élément de $\mathrm{Pic}(X)$ ou de $\mathrm{Pic}(X/Y)$, son degré est défini comme le degré de sa restriction à X_η , ou ce qui revient au même, le degré de sa restriction à n'importe quelle fibre X_s de X (relativement au corps résiduel $k(s)$). Considérons le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Pic}(X) & \xrightarrow{\text{surj.}} & \mathrm{Pic}(X_\eta) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathrm{Pic}(X/Y) & \longrightarrow & \mathrm{Pic}(X_\eta/\eta) \end{array} \quad .$$

On désigne par δ le pgcd des degrés des diviseurs sur X_η , i.e. des degrés des éléments de $\mathrm{Pic}(X_\eta)$, ou encore des éléments de

$\mathrm{Pic}(X)$, par δ' celui des degrés des éléments de $\mathrm{Pic}(X/Y)$, enfin par δ'' celui des éléments de $\mathrm{Pic}(X_\eta/\eta)$. Ce sont des entiers $\geqslant 1$. Voici quelques relations entre ces entiers :

Proposition (4.1).

a) On a $\delta'' \mid \delta' \mid \delta$.

b) Les trois entiers précédents sont égaux si $\mathrm{Br}(\eta) = 0$, par exemple (1.1) si Y est une courbe algébrique sur un corps algébriquement clos, ou Y strictement local à corps résiduel parfait.

c) On a $\delta = \delta'$ si $\mathrm{Br}(Y) = 0$, par exemple si Y est une courbe algébrique propre sur un corps séparablement clos (5.8) ou fini (2.5 b) , ou si Y est strictement local.

En effet, ces assertions résultent du diagramme ci-dessus, compte tenu que si $\mathrm{Br}(\eta) = 0$ (resp. $\mathrm{Br}(Y)n= 0$) alors $\mathrm{Pic}(X_\eta) \to \mathrm{Pic}(X_\eta/\eta)$ (resp. $\mathrm{Pic}(X) \to \mathrm{Pic}(X/Y)$) est surjectif.

Remarques (4.2).

a) On n'a pas toujours $\delta = \delta''$, comme on voit en prenant pour X une forme tordue de la droite projective (auquel cas on a $\delta'' = 1$ car $\underline{\mathrm{Pic}}_{X/Y} \simeq \mathbb{Z}_Y$, et $\delta \neq 1$ comme on voit en utilisant BR II 0, 3ème alinéa). Un tel exemple peut exister même si Y est strictement local, en le prenant à corps résiduel imparfait de car. 2 (de sorte que $\mathrm{Br}(Y)$ est un groupe de 2 -torsion non nul (1.2.1)) ; comme dans ce cas, on a $\delta = \delta'$ en vertu de (4.1 c), on voit qu'on a alors même $\delta' \neq \delta''$. J'ignore si on a toujours

$\delta = \delta'$.

b) Les assertions b) et c) de (4.1) se généralisent de façon évidente en des assertions sur les ℓ-facteurs des entiers δ , δ' δ'' , lorsqu'on suppose seulement qu'on a $\mathrm{Br}(\eta)(\ell) = 0$ resp. $\mathrm{Br}(Y)(\ell) = 0$. Cela prouve que si Y est strictement local, à corps résiduel imparfait de caractéristique p , alors δ/δ'' est une puissance de p (car $\mathrm{Br}(\eta)$ est alors un groupe de p-torsion (1.3)).

c) On a $\delta' = \delta''$ si pour tout point fermé $y \in Y$, il existe une quasi-section étale de X sur Y au-dessus de y (plus généralement, si on a $\delta_y = 1$). En effet, on montre alors que $\mathrm{Pic}(X/Y) \longrightarrow \mathrm{Pic}(X_\eta/\eta)$ est surjectif, cf. (4.14) ci-dessous.

d) Lorsque X admet une section sur Y , i.e. X_η a un point rationnel sur $K(\eta)$, il est évident que $\delta = 1$, et par suite aussi $\delta' = \delta'' = 1$.

e) L'intérêt de la considération de l'entier δ'' (égal à δ dans les cas les plus importants), est qu'il admet une interprétation géométrique intéressante, en introduisant la jacobienne $J = P^o = \mathrm{Ker}\,(P \xrightarrow{\deg} \underline{Z})$, comme étant l'ordre d'un élément remarquable de $H^1(\eta, J)$, savoir la classe du J_η-torseur P^μ_η ,(où μ est la multiplicité radicielle de X_η , égale à 1 si X est séparable - par exemple lisse - sur η , et P^μ désigne l'image inverse de la section constante μ de $\underline{Z}_Y$ par le morphisme degré).

On peut interpréter δ comme étant le pgcd des degrés n des revêtements finis et plats $Y' \dashrightarrow Y$ tels qu'il existe un Y-morphisme $Y' \dashrightarrow X$. Or pour un tel revêtement, la considération de l'homomorphisme trace nous montre que le noyau de

$$H^*(Y,\underline{G}_m) \longrightarrow H^*(Y',\underline{G}_m)$$

est annulé par n , et comme d'autre part il contient celui de $H^*(Y,\underline{G}_m) \dashrightarrow H^*(X,\underline{G}_m)$, on conclut :

Proposition (4.3). Les groupes S , T de (4.6) à (4.7) sont annulés par δ . En particulier, si $\delta = 1$, par exemple si X admet une section sur Y , alors ces groupes sont nuls. Ils sont nuls également si Y est une courbe algébrique sur un corps algébriquement clos, et alors $Br(X) \simeq H^1(Y,P)$.

En effet, dans ce dernier cas nous savons que $H^2(Y,\underline{G}_m) = H^3(Y,\underline{G}_m) = 0$.

Corollaire (4.4). Supposons que Y soit une courbe algébrique sur un corps fini. Alors les groupes S et T sont des groupes finis. Si Y est complète, alors $S = 0$, et T est un groupe cyclique d'ordre divisant δ , et on a la suite exacte

$$0 \dashrightarrow Br(X) \dashrightarrow H^1(Y,P) \dashrightarrow T \dashrightarrow 0 .$$

En effet, $H^2(Y,\underline{G}_m)$ et $H^3(Y,\underline{G}_m)$ sont alors des groupes contenus dans une somme finie de groupes $\underline{Q}/\underline{Z}$, comme il résulte aussitôt des résultats des n^{os} 1 et 2 . Lorsque Y est complète, on trouve même $Br(Y) = 0$, $H^3(Y,\underline{G}_m) \simeq \underline{Q}/\underline{Z}$, d'où le corollaire.

Soit

$$i = \eta \dashrightarrow Y$$

l'inclusion du point générique, et posons

(4.8) $$\underline{B} = i_*(i^*(P)) \quad ,$$

de sorte qu'on a un homomorphisme canonique

(4.9) $$P \dashrightarrow \underline{B} \quad ,$$

et on posera

(4.10) $$\underline{E} = \mathrm{Ker}\ (P \dashrightarrow \underline{B}) \quad , \quad \underline{F} = \mathrm{Coker}\ (P \dashrightarrow \underline{B}) \quad .$$

Les faisceaux $\underline{E}$ et $\underline{F}$ sont des "faisceaux gratte-ciel", qui sont donc connus lorsqu'on connait leurs restrictions aux points fermés de Y . Leurs fibres géométriques au-dessus d'un tel point y s'obtiennent comme les noyau et conoyau de l'homomorphisme

$$\mathrm{Pic}(\widetilde{X}) = \mathrm{Pic}\ (\widetilde{X}/\widetilde{Y}) \longrightarrow \mathrm{Pic}(\widetilde{X}_{\widetilde{\eta}}/\widetilde{\eta}) \quad ,$$

où les $\sim$ dénotent l'effet de la localisation stricte relativement à un point géométrique $\bar{y}$ au-dessus de y . Compte tenu que le morphisme précédent se factorise par le sous-groupe $\mathrm{Pic}(\widetilde{X}_{\eta})$, et que $\mathrm{Pic}(\widetilde{X}) \dashrightarrow \mathrm{Pic}(\widetilde{X}_{\widetilde{\eta}})$ est surjectif puisque $\widetilde{X}$ est régulier, on trouve

(4.11) $$\underline{F}_{\bar{y}} = \mathrm{Pic}(\widetilde{X}_{\eta}/\widetilde{\eta}) \ / \ \mathrm{Pic}(\widetilde{X}_{\widetilde{\eta}})$$

(4.12) $$\underline{E}_{\bar{y}} = \mathrm{Ker}\ (\mathrm{Pic}(\widetilde{X}) \dashrightarrow \mathrm{Pic}(\widetilde{X}_{\widetilde{\eta}})) \quad .$$

Compte tenu que $\mathrm{Br}(\widetilde{\eta}) = 0$ si $k(y)$ est parfait, et que c'est un groupe de $p(y)$ -torsion en tous cas, où $p(y)$ est l'exposant caractéristique de $k(y)$, on trouve que $\underline{F}_{\bar{y}}$ est un groupe de $p(y)$ -torsion, nul si $k(y)$ est parfait. Désignant par δ_y , δ'_y , δ''_y les entiers analogues à δ , δ' , δ'' pour la situation localisée $\tilde{X} \longrightarrow \tilde{Y}$, un argument déjà fait plus haut nous montre que $\underline{F}_{\bar{y}}$ est nul également si $\delta_y = 1$, par exemple si $\tilde{X}$ admet une section sur $\tilde{Y}$. Nous allons supposer pour simplifier, par la suite, que l'on a

$$(4.13) \qquad \underline{F} = 0 \quad ,$$

ce qui en vertu des remarques qui précèdent sera vérifié dans les cas les plus intéressants. (Dans le cas contraire, il faudra dans les résultats qui suivent se borner aux composantes premières aux caractéristiques résiduelles des groupes envisagés). Alors on obtient donc une suite exacte courte

$$(4.10\ \text{bis}) \qquad 0 \longrightarrow \underline{E} \longrightarrow P \longrightarrow \underline{B} \longrightarrow 0 \quad ,$$

permettant de relier la cohomologie de P avec celle de $\underline{B}$ et $\underline{E}$. Compte tenu de la structure discrète de $\underline{E}$, on trouve la suite exacte de cohomologie (où les sommes sont étendues aux points <u>fermés</u> y de Y) :

$$(4.14) \qquad 0 \longrightarrow \coprod_y H^0(y,\underline{E}_y) \to \mathrm{Pic}(X/Y) \to \mathrm{Pic}(\overline{X_\eta/\eta}) \to \coprod_y H^1(y,\underline{E}_y) \to$$
$$\to H^1(Y,P) \to H^1(Y,\underline{B}) \to \coprod_y H^2(y,\underline{E}_y) \quad .$$

Lorsque pour tout point fermé y de Y , $k(y)$ est séparablement clos, (par exemple Y une courbe algébrique sur k séparablement clos), cette suite exacte nous donne simplement

(4.14 bis) $$H^1(Y,P) \xrightarrow{\sim} H^1(Y,B) \quad .$$

Dans le cas général, notons qu'on voit sur cette suite exacte que l'image de $H^1(Y,P)$ dans $H^1(Y,\underline{B})$ est définie par des conditions de nature locale relativement à la hensélisation ordinaire (s'exprimant en effet par l'annulation de certains éléments des $H^2(y,\underline{E}_y)$). Désignant par $\bar{Y}$, $\bar{X}$ les schémas déduits de Y, X par hensélisation ordinaire en le point fermé $y \in Y$ (non précisé dans la notation), on voit qu'un élément de $H^1(y,\underline{B})$ appartient à l'image de $H^1(Y,P)$ si et seulement si pour tout y, son image dans $H^1(\bar{Y},\underline{B})$ est dans celle de $H^1(\bar{Y},P)$. Supposons qu'on ait pour tout y :

(4.15) $$H^1(\bar{Y}, P) = 0 \quad ,$$

ce qui sera vérifié si $k(y)$ est un corps séparablement clos ou fini (cf. (3.4 b) pour le cas k fini). Alors l'image de $H^1(Y,P)$ dans $H^1(Y,\underline{B})$ est le sous-groupe de $H^1(Y,\underline{B})$ formé des éléments dont l'image dans chaque $H^1(\bar{Y},\underline{B})$ est nulle. Ce sous-groupe s'appelle le <u>groupe de Tate-Chafarévitch de</u> Y <u>à coefficients dans</u> $\underline{B}$, et se note $Ш(Y,B)$ (cf. plus bas pour la relation avec la définition originelle de Tate et Chafarévitch). On trouve alors la suite exacte déduite de (4.14) :

(4.17) $$\ldots \operatorname{Pic}(X_\eta/\eta) \to \coprod_y H^1(y,\underline{E}_y) \to H^1(Y,P) \to Ш(Y,\underline{B}) \to 0 \quad ,$$

explicitant $H^1(Y,P)$ comme une extension du groupe de Tate-Chafarévitch par un quotient de la somme $\coprod_y H^1(y,\underline{E}_y)$.

Il faut enfin expliciter cette dernière somme. Notons que $\underline{E}_y$

est nul si X_y est géométriquement intègre, a fortiori si X_y est lisse sur y, de sorte que si X_η est séparable sur $k(\eta)$ (par exemple, lisse sur $k(\eta)$), alors le support de E est contenu dans (en fait, égal à) l'ensemble fini des $y_i \in Y$ tels que X_{y_i} ne soit pas géométriquement intègre. Un calcul facile donne pour $\underline{E}_y$ la structure suivante (en procédant par descente à partir de $\underline{E}_{\bar{y}}$). On écrit l'égalité de diviseurs sur X :

(4.18) $$X_y = \sum_i a_y^i C_y^i \quad ,$$

les C_y^i étant les composantes irréductibles de X_y, et les a_y^i leur multiplicité dans la fibre. On désigne par

(4.19) $$\mu_y^i \quad , \quad \nu_y^i$$

la multiplicité radicielle et la multiplicité séparable de C_y^i sur $k(y)$ respectivement (EGA IV 4.7.4), -donc $\mu_y^i = 1$ si $k(y)$ est parfait. On considère aussi la plus petite extension galoisienne $k(y)^i$ de $k(y)$ tel que les composantes irréductibles de $(X_y^i) \otimes_{k(y)} k(y)^i$ soient géométriquement irréductibles : c'est une extension finie de $k(y)$, de degré ν_y^i. On pose

(4.20) $$Z_y^i = \mathrm{Spec}(k(y)^i) \ , \ Z_y = \coprod Z_y^i \ .$$

Ceci posé, le faisceau $\underline{E}_y$ sur y s'insère dans une suite exacte de faisceaux

(4.21) $$0 \longrightarrow \underline{Z}_y \longrightarrow p_{y*}(\underline{Z}_{Z_y}) \longrightarrow \underline{E}_y \longrightarrow 0 \quad ,$$

où $p_y : Z_y \longrightarrow y$ est la projection structurale, et où l'homomorphisme $\underline{Z}_y \longrightarrow p_{y*}(\underline{Z}_{Z_y})$ est adjoint de l'homomorphisme

(4.22) $$p_y^*(\underline{Z}_y) = \underline{Z}_Z \longrightarrow \underline{Z}_Z$$

qui, sur la composante Z_y^i , se réduit à la multiplication par a_y^i . La suite exacte de cohomologie associée à (4.21) nous fournit alors

(4.23) $$\begin{aligned} H^1(y,\underline{E}_y) &= \mathrm{Ker}\,(H^2(y,\underline{Z}_y) \longrightarrow \prod_i H^2(Z_y^i,\underline{Z})) \\ &= \mathrm{Ker}\,(H^1(y,\underline{Q}/\underline{Z}) \longrightarrow \prod_i H^1(Z_y^i,\underline{Q}/\underline{Z})) \quad , \end{aligned}$$

où la flèche $H^1(y,\underline{Q}/\underline{Z}) \longrightarrow H^1(Z_y^i,\underline{Q}/\underline{Z})$ est l'homomorphisme de transition évident, multiplié par a_y^i . Comme $H^1(y,\underline{E}_y)$ est l'intersection des noyaux de ces homomorphismes, et qu'un tel noyau est manifestement annulé par $a_y^i\ \nu_y^i$, on voit que $H^1(y,\underline{E}_y)$ est annulé par

(4.24) $$d_y = \mathrm{pgcd}(a_y^i\ \nu_y^i) \quad .$$

Lorsque $k(y)$ est fini, ou plus généralement pseudo-fini au sens de Serre, i.e. son groupe fondamental $\mathrm{Gal}(\overline{k(y)}/k(y))$ isomorphe à $\hat{\underline{Z}}$, alors on trouve même la valeur exacte :

(4.25) $$H^1(y,\underline{E}_y) \simeq \underline{Z}/d_y\underline{Z} \quad .$$

Ainsi, on trouve que <u>pour que</u> $H^1(y,\underline{E}_y)$ <u>soit nul</u>, <u>il est suffisant en tous cas</u>, <u>et nécessaire lorsque</u> $k(y)$ <u>est quasi-fini</u>, <u>que l'on ait</u> $d_y = 1$.

Notons que d_y ne dépend que de la situation localisée <u>stricte</u> $\tilde{f} : \tilde{X} \longrightarrow \tilde{Y}$ en y , car c'est le pgcd des multiplicités des composantes irréductibles de $\tilde{X}_{\tilde{y}}$, ou encore l'ordre du sous-groupe de torsion de la fibre géométrique $\underline{E}_{\bar{y}}$, laquelle est en effet donnée par l'isomorphisme canonique

(4.26) $$\mathrm{Tors}(\underline{E}_{\bar{y}}) = \underline{Z}/d_y\underline{Z} \quad ,$$

(le sous-groupe de torsion de $\underline{E}_{\bar{y}} = \mathrm{Ker}\,(\mathrm{Pic}(X) \longrightarrow \mathrm{Pic}(X))$ étant en effet engendré par la classe du diviseur $(1/d_y)\widetilde{X}_{\bar{y}})$. Cet entier est $\neq 1$ si et seulement si la fibre géométrique $X_{\bar{y}} = X_{\bar{y}}$ est une "fibre multiple", i.e. multiple non trivial d'un cycle positif sur $\widetilde{X}$; on peut donc se borner à ces y dans la suite exacte (4.15). Notons qu'on a aussi la relation

(4.27) $$\delta_y = \mathrm{pgcd}(a^i_y\ \nu^i_y\ \mu^i_y) \quad ,$$

comme il résulte du fait que $\mathrm{Pic}(X) \longrightarrow \mathrm{Pic}(X_{\bar{y}})$ est surjectif (SGA 3 XIII 3.1). Par suite, on a

(4.28) $$d_y = \delta_y \quad \text{si } k(y) \text{ parfait,}$$

et en général

(4.29) $$d_y \mid \delta_y \quad , \quad \delta_y = d_y\, p_y^{\,s_y} \quad ,$$

où p_y désigne l'exposant caractéristique de $k(y)$, et s_y est un entier naturel. Par suite, si $\delta_y = 1$, en particulier si $\widetilde{X}$ admet une section sur $\widetilde{Y}$, alors a fortiori $d_y = 1$ et par suite $H^1(y,\underline{E}_y) = 0$.

Des résultats de cette discussion, retenons en tous cas :

<u>Proposition (4.5)</u>. <u>Supposons qu'on ait</u> (4.13), <u>et que tout élément de</u> $H^1(y,\underline{Q}/\underline{Z})$ <u>annulé par</u> d_y (<u>défini dans</u> (4.24)) <u>soit nul</u>, <u>par exemple</u> $k(y)$ <u>séparablement clos ou</u> $\delta_y = 1$ (<u>par exemple que</u> X

<u>admet une quasi-section étale sur</u> Y <u>en</u> y). <u>Alors</u>

(4.30) $$H^1(Y,P) \xrightarrow{\sim} Ш(Y,\underline{B}) \quad .$$

<u>Ainsi, la suite exacte</u> (4.6 bis) <u>devient</u> :

(4.31) $$0 \longrightarrow Br(X)/\mathrm{Im}\, Br(Y) \longrightarrow Ш(Y,\underline{B}) \longrightarrow T \longrightarrow 0 \quad ,$$

<u>où le groupe</u> T <u>est défini par</u> (4.7) <u>et contrôlé par les énoncés</u> (4.3) <u>et</u> (4.4).

Il convient enfin, pour terminer ces dévissages, d'expliciter le sous-groupe $Ш(Y,\underline{B})$ de $H^1(Y,\underline{B})$ en termes de la jacobienne J de X_η ,

(4.32) $$J = \underline{B}_\eta{}^{o} = \mathrm{Ker}\ (\underline{B}_\eta \xrightarrow{\deg} \underline{Z}_\eta) \quad .$$

Posons

(4.33) $$\underline{A} = i_*(J) = \mathrm{Ker}\ (\underline{B} \xrightarrow{\deg} \underline{Z}_Y) \quad ,$$

nous allons supposer pour simplifier que l'homomorphisme $\deg : \underline{B} \longrightarrow \underline{Z}_Y$ est surjectif, ce qui, par définition essentiellement, signifie aussi que les degrés locaux δ_y sont tous égaux à 1 :

(4.34) $$\delta_y = 1 \quad \text{pour tout point fermé } y \in Y \quad ,$$

ce qui signifie aussi, si les $k(y)$ sont parfaits, que les fibres géométriques de X ne sont pas multiples. On a donc alors une suite exacte

(4.35) $$0 \longrightarrow \underline{A} \longrightarrow \underline{B} \longrightarrow \underline{Z}_Y \longrightarrow 0 \quad ,$$

qui donne la suite exacte de cohomologie

$$\mathrm{Pic}(X_\eta/\eta) \xrightarrow{\deg} \underline{Z} \longrightarrow H^1(Y,\underline{A}) \longrightarrow H^1(Y,\underline{B}) \longrightarrow 0 \quad ,$$

compte tenu que $H^1(Y,\underline{Z}_Y) = 0$; tenant compte de la définition de δ'' , on trouve la suite exacte

$$(4.36) \qquad 0 \longrightarrow \underline{Z}/\delta''\underline{Z} \longrightarrow H^1(Y,\underline{A}) \longrightarrow H^1(Y,\underline{B}) \longrightarrow 0 \quad ,$$

explicitant $H^1(Y,\underline{B})$ comme quotient du groupe $H^1(Y,\underline{A})$ par un sous-groupe fini cyclique $\underline{Z}/\delta''\underline{Z}$. Utilisant les suites exactes analogues pour les situations localisées par hensélisation ordinaire $\overline{f} : \overline{X} \longrightarrow \overline{Y}$, on est conduit à introduire un groupe intermédiaire entre $H^1(Y,\underline{A})$ et $Ш(Y,\underline{A})$

$$(4.37) \qquad Ш'(Y,\underline{A}) = (\xi \in H^1(Y,\underline{A}) \mid \forall\ y \text{ fermé dans } Y \text{ , l'image de } \xi \text{ dans } H^1(\overline{Y},\underline{A}) \text{ est dans } \mathrm{Im}(\underline{Z}/\delta''_y\underline{Z})) \ .$$

Ceci posé, on aura donc une suite exacte :

$$(4.38) \qquad 0 \longrightarrow \underline{Z}/\delta''\underline{Z} \longrightarrow Ш'(Y,\underline{A}) \longrightarrow Ш(Y,\underline{B}) \longrightarrow 0 \ .$$

Explicitons deux cas particuliers importants :

<u>Cas particulier (4.6)</u>. Y <u>est une courbe algébrique sur un corps algébriquement clos</u>. Alors la plus grande partie de la discussion précédente devient triviale. La relation (4.13) est automatiquement satisfaite, et on a (4.14 bis) :

$$(4.39) \qquad \mathrm{Br}(X) \xrightarrow{\sim} H^1(Y,\underline{B}) \quad ;$$

lorsque de plus les δ_y sont égaux à 1, i.e. si X n'a pas de fibre multiple sur Y , alors le deuxième membre s'explicite par

(4.40) $\qquad 0 \longrightarrow \underline{Z}/\delta\underline{Z} \longrightarrow H^1(Y,\underline{A}) \longrightarrow H^1(Y,\underline{B}) \longrightarrow 0$,

compte tenu que l'on a ici nécessairement $\delta = \delta' = \delta''$.

<u>Cas particulier (4.7)</u>. Y <u>est une courbe algébrique propre sur un corps fini</u> k . Ici encore, (4.13) est automatiquement satisfaite, k étant parfait, ainsi que (4.16) puisque $k(y)$ est de dimension $\leqslant 1$, d'où $H^3(k(y), \mathbb{G}_m) = 0$; de plus on aura $\delta = \delta'$, et de même pour les invariants hensélisés et strictement hensélisés. Comme on a encore $Br(Y) = 0$, on trouve ici (4.4) :

(4.41) $\qquad 0 \longrightarrow Br(X) \longrightarrow Ш(Y,\underline{B}) \longrightarrow \underline{Z}/\Delta\,\underline{Z} \longrightarrow 0$, où $\Delta \mid \delta$.

D'autre part, si les δ_y sont égaux à 1, i.e. si le morphisme déduit de $f : X \longrightarrow Y$ en passant à la clôture algébrique de k n'a pas de fibre multiple, alors on trouve la suite exacte

(4.42) $\qquad 0 \longrightarrow \underline{Z}/\delta''\underline{Z} \longrightarrow Ш(Y,\underline{A}) \longrightarrow Ш(Y,\underline{B}) \longrightarrow 0$,

ce qui est un cas particulier de (4.37), compte tenu de la relation suivante :

(4.43) $$\bar{\delta}_y = \delta_y$$

pour tout point fermé y de Y , qui implique ici $\bar{\delta}_y = 1$ d'où $Ш'(Y,\underline{A}) = Ш(Y,\underline{A})$. La démonstration de l'égalité (4.43), qui est une conséquence facile du théorème de LANG [24] $H^1(k,G) = 0$ pour le corps fini $k(y)$ et le schéma de Picard connexe $G = \mathrm{Pic}^o_{X_y/y}$, est laissée au lecteur comme un exercice plaisant et délectable.

Autocritique (4.8). La discussion du cas particulier (4.7) n'est pas complète. On aimerait en particulier déterminer l'entier Δ , ordre du noyau de $H^3(Y,\underline{G}_m) \longrightarrow H^3(X,\underline{G}_m)$ (est-il toujours égal à δ , ou au ppcm des δ_y ?), et préciser les relations entre $Ш(Y,\underline{B})$ et $Ш(Y,\underline{A})$ lorsqu'on ne suppose plus les δ_y égaux à 1. Une analyse plus poussée devrait donner en particulier la formule conjecturale "élémentaire" [32,(4.4)] de ARTIN et TATE.

Complément (4.9). Lien avec la définition habituelle du groupe de Tate-Chafarévitch. Les faisceaux $\underline{B}$, $\underline{A}$ pour lesquels nous avons considéré les groupes de Tate-Chafarévitch étaient tous deux de la forme $i_*(F_\eta)$, où F_η était un faisceau abélien sur le point générique η . La suite exacte habituelle, associée à la suite spectrale de Leray pour l'inclusion $i : \eta \longrightarrow Y$, nous donne alors

(4.44) $\quad 0 \longrightarrow H^1(Y,i_*(F_\eta)) \longrightarrow H^1(\eta, F_\eta) \longrightarrow \coprod_y H^1(\tilde{K}(y),F_\eta)$,

où $\tilde{K}(y)$ désigne le corps des fractions du localisé strict en y . Ainsi, $H^1(Y,i_*(F_\eta))$ s'interprète comme un sous-groupe du groupe de cohomologie galoisienne $H^1(\eta,F_\eta)$. De ceci, et de la définition de $Ш(Y,i_*(F_\eta))$, on conclut aussitôt la suite exacte

(4.45) $\quad 0 \longrightarrow Ш(Y,i_*(F_\eta)) \longrightarrow H^1(\eta,F_\eta) \longrightarrow \coprod_y H^1(\bar{K}(y),F_\eta)$,

où $\bar{K}(y)$ désigne le corps des fractions du hensélisé ordinaire de Y en y . La suite exacte (4.45) n'est autre essentiellement que la définition originale de TATE et CHAFAREVITCH (du moins dans le cas "géométrique"), à cela près qu'ils considèrent les complétés au lieu des hensélisés des anneaux locaux $\underline{O}_{Y,y}$; dans le cas qu'ils envisagent, comme F_η est défini par un schéma abélien sur η , les deux définitions reviennent au même, car les $H^1(\bar{K}(y),F_\eta)$ sont les mêmes dans les deux cas [30, th. 2 (iii)] . Dans le cas arithmétique, lorsque Y est le spectre de l'anneau des entiers d'un corps de nombres K , la définition de TATE et CHAFAREVITCH diffère de celle que nous envisageons ici, en ce que ces auteurs considèrent également les complétés de K correspondant à des "places à l'infini" i.e. archimédiennes.

<u>Complément (4.10)</u>. <u>Lien avec les modèles de Néron</u>. Par définition même, le faisceau $\underline{A} = i_*(J)$ envisagé plus haut n'est autre que le faisceau étale associé au faisceau en groupes lisse sur Y construit par NERON [29] en termes de la variété abélienne J (nous supposons ici X_η lisse sur η , donc J une variété abélienne ; il semble d'après des travaux en cours de RAYNAUD que cette restriction n'esf d'ailleurs pas nécessaire). La même remarque essentiellement s'applique à $\underline{B}$, à cela près qu'il faut prendre ici le modèle de Néron d'un schéma en groupes $\underline{\mathrm{Pic}}_{X_\eta/\eta}$ qui n'est pas de type fini sur η ; cela n'offre pas de difficulté, puisque la théorie de Néron a été écrite également pour des fibrés principaux homogènes sous des schémas abéliens. La considération des modèles de Néron et de leurs relations au foncteur de Picard $\underline{\mathrm{Pic}}_{X/Y}$ doit permettre de donner des compléments importants sur les groupes de cohomologie $H^1(Y,\underline{A})$, $H^1(Y,\underline{B})$ et leurs variantes chafarévitchisées. Dans le cas particulier (4.7), on voit par exemple aussitôt, grâce à ces modèles, que les groupes de Tate-Chafarévitch envisagés sont <u>d'indice fini</u> dans les H^1 correspondants. Pour des relations plus précises,

nous renvoyons aux futurs papiers de M. RAYNAUD.

5. Utilisation de la topologie "fidèlement plate de présentation finie", application au groupe de Picard relatif.

En plus de la topologie étale, nous allons utiliser la topologie fppf d'un préschéma X, pour laquelle un système fondamental de familles couvrantes pour X est formée des familles surjectives $(f_i : X_i \dashrightarrow X)$ de morphismes plats localement de présentation finie [SGA3 IV 6.3] ; on voit alors qu'on peut même supposer les f_i localement quasi-finis (et même quasi-finis si X est quasi-séparé). Nous désignerons ici par X_{pl} le préschéma X considéré comme "muni de la topologie fppf" (ou plus précisément, le site formé des préschémas localement de présentation finie sur X, muni de la topologie qu'on vient de préciser), de sorte que pour un préschéma en groupes commutatifs G sur X, $H^i(X_{pl},G)$ désignera les groupes de cohomologie correspondants, par contraste avec $H^i(X,G) = H^i(X_{et},G)$, qui désignent les groupes de cohomologie étale. Du point de vue du morphisme canonique de sites

$$p : X_{pl} \longrightarrow X_{ét} \quad ,$$

les faisceaux G_{pl} et $G_{ét}$ sur X_{pl} et $X_{ét}$ respectivement définis par G sont reliés par

(5.1) $$G_{ét} = p_*(G_{pl}) \quad ,$$

d'où on conclut comme d'habitude des homomorphismes fonctoriels

$$H^i(X_{\text{ét}},G) \longrightarrow H^i(X_{\text{pl}},G) \quad , \tag{5.2}$$

qui pour $i = 0$ est un isomorphisme, donc pour $i = 1$ est un monomorphisme. Nous utiliserons dans le présent n° le fait, prouvé en Appendice (11.7), que <u>lorsque</u> G <u>est lisse sur</u> X (en particulier lorsque $G = \underline{G}_m$), <u>alors</u> (5.2) <u>est un isomorphisme pour tout</u> i .

Soit maintenant

$$f : X \longrightarrow Y$$

un morphisme quasi-compact et quasi-séparé, supposons que l'on a (pour les faisceaux de Zariski habituels)

$$\underline{O}_Y \xrightarrow{\sim} f_*(\underline{O}_X) \tag{5.3}$$

(relation qui restera vérifiée alors après tout changement de base plat), et que f admette des sections localement fppf sur Y , par exemple que f soit fidèlement plat et de présentation finie. Utilisant la définition [16, V] du foncteur de Picard relatif $\underline{\text{Pic}}_{X/Y}$, les hypothèses faites impliquent que sa restriction aux préschémas plats localement de présentation finie sur Y coïncide avec la restriction à ces arguments du faisceau $R^1 f_{\text{pl}*}(\underline{G}_m)$; lorsque (5.3) reste vrai pour tout changement de base, donc est un isomorphisme $\underline{O}_Y \xrightarrow{\sim} f_{\text{pl}*}(\underline{O}_X)$, alors dans l'assertion précédente il n'est pas nécessaire d'ailleurs de se borner aux arguments plats sur Y , et on trouve simplement

$$\underline{\text{Pic}}_{X/Y} = R^1 f_{\text{pl}*}(\underline{G}_m) \quad , \tag{5.4}$$

(avec le grain de sel que le premier membre est considéré comme restreint au site X_{pl}). Utilisant la notation $\underline{\mathrm{Pic}}_{X/Y}(Y) = \mathrm{Pic}(X/Y)$ de loc. cit., la suite spectrale de Leray pour

$$f_{pl} : X_{pl} \longrightarrow Y_{pl}$$

nous fournit une suite exacte en basses dimensions

$$(5.5)\quad 0 \longrightarrow \mathrm{Pic}(Y) \longrightarrow \mathrm{Pic}(X) \longrightarrow \mathrm{Pic}(X/Y) \longrightarrow H^2(Y_{pl},\underline{G}_m) \longrightarrow \cdots$$

Utilisons maintenant que, d'après ce qui a été dit plus haut,

$$(5.6)\qquad H^2(Y_{pl},\underline{G}_m) = H^2(Y_{ét},\underline{G}_m) \quad ,$$

donc que tout élément de $H^2(Y_{pl},\underline{G}_m)$ s'annule localement pour la topologie étale. On obtient alors :

Théorème (5.1). Soit $f : X \longrightarrow Y$ un morphisme quasi-compact et quasi-séparé satisfaisant (5.3) et admettant une section localement fppf sur Y. Alors tout élément ξ du groupe de Picard relatif $\mathrm{Pic}(X/Y)$ se réalise localement pour la topologie étale sur Y par un élément de $\mathrm{Pic}(X)$, i.e. on peut trouver une famille surjective de morphismes étales $Y_i \longrightarrow Y$, tel que chaque ξ_i = image de ξ dans $\mathrm{Pic}(X\times_Y Y_i/Y_i)$ soit image d'un élément de $\mathrm{Pic}(X\times_Y Y_i)$.

Lorsque la relation (5.3) a lieu universellement, on peut encore exprimer ce résultat en disant que $\underline{\mathrm{Pic}}_{X/Y}$, qui a été défini via le foncteur $Y' \longmapsto \mathrm{Pic}(X\times_Y Y')$ en passant au faisceau associé pour la topologie fidèlement plate, et qui en vertu de (5.4) est aussi le faisceau associé pour la topologie fidèlement plate de présentation finie, peut aussi se calculer plus simplement comme le faisceau associé pour la topologie étale, i.e. on a

(5.7) $$\underline{\mathrm{Pic}}_{X/Y} = R^1 f_{\mathrm{et}*}(\underline{G}_m) \quad ,$$

(avec le même grain de sel que ci-dessus). Une autre façon essentiellement équivalente d'exprimer (5.1) est la suivante :

Corollaire (5.2). Sous les conditions de (5.1), supposons de plus Y strictement local, alors l'homomorphisme $\mathrm{Pic}(X) \longrightarrow \mathrm{Pic}(X/Y)$ est surjectif, donc on a un isomorphisme

(5.8) $$\mathrm{Pic}(X/Y) \simeq \mathrm{Pic}(X)/\mathrm{Pic}(Y) = \mathrm{Pic}(X) \quad .$$

Utilisant maintenant la suite spectrale de Leray pour

$$f_{\text{ét}} : X_{\text{ét}} \longrightarrow Y_{\text{ét}}$$

et le faisceau $\underline{G}_m$, et utilisant (5.1), on trouve le

Corollaire (5.3). Sous les conditions de (5.1), on a une suite exacte canonique :

(5.9) $$0 \to \mathrm{Pic}(Y) \to \mathrm{Pic}(X) \to \mathrm{Pic}(X/Y) \to \mathrm{Br}'(Y) \to \mathrm{Br}'(X)^{\mathrm{tr}} \to H^1(Y, \underline{\mathrm{Pic}}_{X/Y}),$$

où le groupe de cohomologie écrit est pris au sens de la cohomologie étale (l'exposant tr au groupe $H^2(X,\underline{G}_m) = \mathrm{Br}'(X)$ indique le sous-groupe des "éléments transgressifs" au sens de la suite spectrale).

(5.4). Un intérêt particulier s'attache à l'homomorphisme

(5.9 bis) $$\delta : \mathrm{Pic}(X/Y) \longrightarrow \mathrm{Br}'(Y) = H^2(Y,\underline{G}_m) \quad ,$$

qui apparaît comme un homomorphisme d'<u>obstruction au relèvement d'un élément du groupe de Picard relatif de</u> X <u>en un élément du groupe de Picard absolu</u>. On notera qu'en général, cet homomorphisme ne prend pas ses valeurs dans le groupe de Brauer géométrique $Br(X) \to Br'(X)$, comme on voit en prenant pour Y la surface normale de MUMFORD signalée dans [BR II 1.11 b)] , pour X l'ouvert complémentaire du point singulier. J'ignore ce qu'il en est lorsque f est plat et propre de présentation finie, et que la relation (5.3) est vraie universellement. Dans ce cas, moyennant une légère hypothèse supplémentaire sur l'élément envisagé ξ de $Pic(X/Y)$, on peut cependant donner une construction géométrique simple d'un fibré de Brauer-Séveri P sur Y dont la classe dans $Br(Y)$ est $\delta(\xi)$. Pour exprimer cette condition, considérons un morphisme étale et surjectif $Y' \to Y$ tel que l'image de ξ dans $Pic(X'/Y')$ provienne d'un faisceau inversible $\underline{L}$ sur X' . Notre condition est que

a) $f'_*(\underline{L}')$ soit un faisceau localement libre sur Y' , dont la formation commute à tout changement de base (i.e. que $\underline{L}'$ soit "cohomologiquement plat sur Y' en dimension 0", au sens de [EGA III 7.8.1] , et que de plus

b) pour toute fibre géométrique $X'_{\bar{y}'}$ de X' sur Y' , l'image inverse de $\underline{L}'$ sur cette dernière puisse être définie par un diviseur (de Cartier) positif, i.e. que ce faisceau admette une section qui soit partout régulière. (Ces conditions, manifestement, ne dépendent pas du choix de Y' , $\underline{L}'$). Considérons alors le fibré projectif $\check{P}(f'_*(\underline{L}'))$, il est muni d'une donnée de descente naturelle pour $Y' \to Y$, et grâce à a) cette donnée est nécessairement effective, car elle laisse stable le faisceau des différentielles relatives de degré maxima, dont l'inverse est relativement ample. Désignons par $\check{P}(\xi)$ le Y-préschéma descendu, qui est donc un fibré de Brauer-Séveri [BR I 8] sur Y. Utilisant b), on voit que dans $P = \check{P}(\xi)$ il y a un ouvert canonique V, qui représente le foncteur $Y' \mapsto$ ensemble des diviseurs relatifs positifs de X' sur Y' dont la classe dans $\mathrm{Pic}(X'/Y')$ est égale à ξ' = image de ξ dans $\mathrm{Pic}(X'/Y')$; lorsque les fibres géométriques de X sur Y sont intègres, cet ouvert est même égal à P, ce qui fournit alors une interprétation géométrique pour P, comparer [16, V th. 4.3]. On (plus précisément, J. GIRAUD) vérifie que la classe de cet élément dans $\mathrm{Br}(X)$ est bien $\delta(\xi)$. Lorsque f est projectif et Y quasi-compact, alors tout élément de $\mathrm{Pic}(X/Y)$ s'écrit comme différence de deux éléments qui sont"suffisamment amples" pour que les hypothèses a) et b) envisagées plus haut soient satisfaites. On trouve par suite :

Corollaire (5.5). *Soit* $f : X \to Y$ *un morphisme projectif, plat et de présentation finie, avec* Y *quasi-compact, tel que pour tout* $y \in Y$, *on ait* $k(y) \xrightarrow{\sim} H^0(X_y, \underline{O}_{X_y})$. *Alors l'homomorphisme d'obstruction* (5.9 bis) *prend ses valeurs dans* $\mathrm{Br}(Y)$, *i.e. induit un homomorphisme*

$$\mathrm{Pic}(X/Y) \to \mathrm{Br}(Y) \quad . \tag{5.10}$$

Soit maintenant X un schéma propre sur un corps k, que nous supposons séparablement clos mais pas nécessairement algébriquement clos. Nous nous proposons d'utiliser les relations entre la topologie étale et la topologie fppf pour étudier les relations entre $Br'(X)$ et $Br'(X')$, où $X' = X \otimes_k k'$, k' étant une clôture algébrique de k . Nous considérons le morphisme de sites

$$f_{pl} : X_{pl} \longrightarrow \mathrm{Spec}(k)_{pl} ,$$

et la suite spectrale de Leray correspondante, pour le faisceau $\underline{G}_m$ sur X_{pl} . Soit $A = H^0(X, \underline{O}_X)$, qui est une algèbre commutative finie sur k , alors on trouve immédiatement que $f_{pl*}(\underline{G}_m)$ est le faisceau défini par le schéma en groupes lisse G sur k des unités de A . Par suite, utilisant le résultat signalé au début du n°, on trouve

$$(5.11) \qquad H^i(k_{pl}, f_{pl*}(\underline{G}_m)) = H^i(k_{pl}, G) = H^i(k_{et}, G) = 0 \quad (i \geqslant 1) .$$

D'autre part, on a par définition essentiellement

$$(5.12) \qquad R^1 f_{pl*}(\underline{G}_m) = \underline{\mathrm{Pic}}_{X/k} ,$$

et la suite spectrale de Leray donne alors une suite exacte

$$(5.12) \quad 0 \to H^1(k_{pl}, \underline{\mathrm{Pic}}_{X/k}) \to H^2(X, \underline{G}_m) \to H^0(k, R^2 f_{pl*}(\underline{G}_m)) \to H^2(k_{pl}, \underline{\mathrm{Pic}}_{X/k}) .$$

D'autre part, le calcul habituel de $R^2 f_{pl*}(\underline{G}_m)$ comme le faisceau associé à un certain préfaisceau nous donne, par un passage à la limite facile

$$(5.13) \qquad H^0(k_{pl}, R^2 f_{pl*}(\underline{G}_m)) \xrightarrow{\sim} H^2(X', \underline{G}_m)^{\mathrm{inv}} ,$$

où le deuxième membre désigne le sous-groupe de $H^2(X', \underline{G}_m)$ formé des éléments "invariants" au sens de la descente $\mathrm{Spec}(k') \longrightarrow \mathrm{Spec}(k)$, i.e.

$$(5.14) \qquad H^2(X',\underline{G}_m)^{inv} = \mathrm{Ker}(H^2(X',\underline{G}_m) \rightrightarrows H^2(X'',\underline{G}_m)) \quad ,$$

où on a posé

$$X'' = X' \times_X X' = X \otimes_k (k' \otimes_k k') = X \otimes_k k'' \quad , \qquad (k'' = k' \otimes_k k') \ .$$

Ainsi on trouve :

Proposition (5.6). Soit X propre sur k corps séparablement clos, et soit k' une clôture algébrique de k, $X' = X \otimes_k k'$. Alors on a la suite exacte (5.12), qui nous donne en particulier la suite exacte

$$0 \longrightarrow H^1(k_{pl},\underline{\mathrm{Pic}}_{X/k}) \longrightarrow \mathrm{Br}'(X) \longrightarrow \mathrm{Br}'(X') \quad ,$$

en particulier pour que $\mathrm{Br}'(X) \longrightarrow \mathrm{Br}'(X')$ soit injectif, il faut et il suffit que $H^1(k_{pl},\underline{\mathrm{Pic}}_{X/k}) = 0$. Si $H^2(k_{pl},\underline{\mathrm{Pic}}_{X/k}) = 0$, alors l'image de $\mathrm{Br}'(X)$ dans $\mathrm{Br}'(X')$ est le sous-groupe $\mathrm{Br}'(X')^{inv}$ décrit dans (5.14).

Le cas le plus intéressant est celui où $\underline{\mathrm{Pic}}_{X/k}$ est lisse, car d'après le résultat déjà invoqué, on en conclut alors

$$(5.15) \qquad H^i(k_{pl},\underline{\mathrm{Pic}}_{X/k}) = H^i(k_{et},\underline{\mathrm{Pic}}_{X/k}) = 0 \quad \text{pour} \quad i \geqslant 1 \quad ,$$

et par suite :

Corollaire (5.7). Avec les notations de (5.6) supposons que $\underline{\mathrm{Pic}}_{X/k}$ soit lisse sur k (par exemple $H^2(X,\underline{O}_X)=0$, ou $H^1(X,\underline{O}_X)=0$). Alors l'application $\mathrm{Br}'(X) \longrightarrow \mathrm{Br}'(X')$ est injective, son image est formée des éléments "invariants" de $\mathrm{Br}'(X')$ (définis par (5/14)).

En particulier, utilisant (1.2), on trouve :

<u>Corollaire (5.8)</u>. <u>Soit</u> X <u>une courbe algébrique propre sur un corps</u> k <u>séparablement clos</u>. <u>Alors</u> $Br'(X) = Br(X) = 0$.

<u>Remarques (5.9)</u>. Lorsque $P = \underline{Pic}_{X/k}$ n'est pas nécessairement lisse sur k , supposons que P_{red} soit un sous-schéma en groupes P' de X lisse sur k (condition automatiquement vérifiée lorsque P^{o} est propre sur k , par exemple lorsque X est géométriquement normal sur k), de sorte qu'on a une suite exacte de schémas en groupes

$$0 \longrightarrow P' \longrightarrow P \longrightarrow P'' \longrightarrow 0 \quad , \tag{5.16}$$

où P' est lisse et P'' est un groupe fini radiciel sur k . La suite exacte de cohomologie et $H^{i}(k_{pl},P') = H^{i}(k_{et},P') = 0$ pour $i \geqslant 1$, nous donnent alors

$$H^{i}(k_{pl},P) \xrightarrow{\sim} H^{i}(k_{pl},P'') \qquad (i \geqslant 1), \tag{5.17}$$

ce qui nous ramène au calcul des H^{i} à coefficients dans le groupe fini radiciel P'' . Un dévissage facile nous donne pour un tel groupe

$$H^{1}(k_{pl},P'') \neq 0 \quad \text{si } P'' \neq 0, \ k \text{ non parfait,} \tag{5.18}$$

$$H^{i}(k_{pl},P'') = 0 \quad \text{pour} \quad i \geqslant 2 \quad ,$$

ce qui nous montre que l'application $Br'(X) \longrightarrow Br'(X')^{inv}$ est nécessairement surjective, et que (lorsque k n'est pas parfait) son noyau est nul <u>si et seulement si</u> $\underline{Pic}_{X/k}$ est lisse sur k . D'ailleurs, sans aucune hypothèse préliminaire sur P , on peut montrer que l'on a

$$(5.19) \qquad H^i(k_{pl},P) = 0 \quad \text{pour} \quad i \geqslant 2$$

(utiliser l'existence d'un sous-groupe fini radiciel N de P tel que P/N soit lisse). Il en résulte que $Br'(X) \longrightarrow Br(X')^{inv}$ est en tous cas surjectif.

6. Théorème de pureté pour le groupe de Brauer.

Soient X un préschéma localement noethérien <u>régulier</u>, Y un sous-préschéma fermé, de codimension $d > 0$ en chaque point. On s'intéresse aux faisceaux de cohomologie locale $\underline{H}^i_Y(\underline{G}_m)$, qui s'introduisent dans l'explicitation des relations entre la cohomologie de X et celle de $X-Y$ à coefficients dans $\underline{G}_m$ via la suite exacte bien connue [SGA4 V 4.3 et VIII 6.6] :

$$(6.1) \qquad H^i_Y(X,\underline{G}_m) \longrightarrow H^i(X,\underline{G}_m) \longrightarrow H^i(X-Y,\underline{G}_m) \longrightarrow H^{i+1}_Y(X,\underline{G}_m) \quad ,$$

et la suite spectrale (variante de la suite spectrale de Leray) "de passage du local au global" :

$$(6.2) \qquad H_Y(X,\underline{G}_m) \Longleftarrow E_2^{p,q} = H^p(Y,\underline{H}^q_Y(\underline{G}_m)) \quad .$$

On trouve immédiatement les valeurs

$$(6.3) \qquad \underline{H}^o_Y(\underline{G}_m) = 0$$

$$(6.4) \qquad \underline{H}^1_Y(\underline{G}_m) = \begin{cases} 0 & \text{si } d \neq 1 \\ \sum_i \underline{Z}_{Y_i,X} & \text{si } d = 1 \end{cases}$$

(6.5) $$\underline{H}^2_Y(\underline{G}_m) = 0 \quad ,$$

où les Y_i sont les composantes irréductibles de Y. Les faisceaux $\underline{H}^i_Y(\underline{G}_m)$ pour $i \geqslant 3$ sont des faisceaux de torsion, comme il résulte de l'expression habituelle des fibres géométriques

(6.6) $$\underline{H}^i_Y(\underline{G}_m)_{\bar{y}} \simeq H^{i-1}(\bar{X}-\bar{Y},\underline{G}_m) \quad \text{pour } i \geqslant 2 \quad ,$$

(où $\bar{X},\bar{Y}$ sont les localisés stricts de X,Y en $\bar{y}$), et de (BR II 1.4). On dira que le couple (X,Y) <u>satisfait au théorème de pureté pour le groupe de Brauer</u> (resp. relativement à l'ensemble $\mathbb{L}$ de nombres premiers), si l'on a

(6.7) $$\underline{H}^3_Y(\underline{G}_m) = 0 \quad , \text{ i.e. } H^2(\bar{X}-\bar{Y},\underline{G}_m) = 0 \text{ pour tout point géométrique } \bar{y} \text{ de } Y \quad ,$$

(resp. si pour tout $\ell \in \mathbb{L}$, la composante ℓ-primaire de $\underline{H}^3_Y(\underline{G}_m)$ est nulle). Lorsque $\dim X = 1$, donc $d = 1$, cette notion est justiciable du n° 1, qui implique que la propriété de pureté est satisfaite si les $k(y)$, $y \in Y$, sont parfaits, et que la propriété de pureté est satisfaite en tous cas pour tout nombre premier ℓ distinct des caractéristiques de ces $k(y)$.

Revenant au cas général du début, il est assez plausible que le couple (X,Y) satisfait <u>toujours</u> au théorème de pureté pour le groupe de Brauer, lorsqu'on se borne dans le cas $d = 1$ à l'énoncer pour les ℓ distincts des caractéristiques résiduelles de Y. On peut en tous cas dès à présent donner à cet égard les résultats suivants :

<u>Théorème (6.1)</u>. <u>Soient</u> X <u>un préschéma régulier</u>, Y <u>un sous-préschéma-</u>

ma fermé de codimension d partout. Alors le couple (X,Y) satisfait au théorème de pureté pour le groupe de Brauer, relativement au nombre premier ℓ, dans chacun des cas suivants :

a) $\dim X = 1$, et pour tout $y \in Y$, $k(y)$ est parfait ou $\ell \neq \mathrm{car}\, k(y)$.

b) $\dim X = 2$, $d = 2$.

c) X est lisse sur un corps k, et $\ell \neq \mathrm{car}\, k$.

d) X est de caractéristique nulle et excellent [EGA IV 7.8.2].

Démonstration. Le cas a) est mis pour mémoire, il vient d'être rappelé. Pour le cas b), on peut supposer X strictement local, Y réduit à son point fermé, et on est ramené à prouver que sous ces conditions, on a $H^2(X-(y),\underline{G}_m) = 0$. Or le premier membre est identique à $\mathrm{Br}(X-(y))$ en vertu de (BR II 2.2). On est donc ramené à prouver que toute Algèbre d'Azumaya $\underline{A}$ sur $X-(y)$ est triviale. Or comme on a vu dans la démonstration de (BR II 2.2), si $i : X-(y) \longrightarrow X$ est l'injection, alors $i_*(\underline{A})$ est encore une Algèbre d'Azumaya, grâce au fait que $\dim X = 2$. Comme cette dernière est triviale en vertu du théorème d'AZUMAYA [BR I 6.1], il en est de même de $\underline{A}$. Pour les autres cas, notons que si X est strictement local, alors la relation $H^2(X-Y,\underline{G}_m)(\ell) = 0$ que nous désirons établir équivaut, en vertu de la suite exacte de Kummer (BR II 3.1) et de la relation $\mathrm{Pic}(X-Y) = 0$, à la relation

$$H^2(X-Y, \boldsymbol{\mu}_{\ell^\infty}) = 0 \quad , \tag{6.8}$$

qui est une relation du type "pureté topologique" habituel. Ainsi, revenant au cas général, le couple (X,Y) satisfait au théorème de pureté pour le groupe de Brauer, relativement à 1, si et seulement si on a

(6.8 bis) $$\underline{H}^3_Y(\mu_{\ell^\infty}) = \lim \underline{H}^3_Y(\mu_{\ell^n}) = 0 \quad ,$$

et il suffit pour ceci (et il faut également, comme on constate sans peine) qu'on ait pour tout n la relation

(6.8 ter) $$\underline{H}^3_Y(\mu_{\ell^n}) = 0 \quad .$$

Or on a, plus généralement,

(6.9) $$\underline{H}^i_Y(\mu_{\ell^n}) = 0 \quad \text{si} \quad i < 2d \quad ,$$

dans les cas c) et d), comme il est prouvé dans [SGA 4 XVI 3.9, XX]. Ceci prouve d'ailleurs plus généralement, sous les conditions c) ou d) :

(6.10) $$\underline{H}^i_Y(\underline{G}_m)(\ell) = 0 \quad \text{si} \quad (i \neq 1 \text{ ou } d \neq 1) \quad \text{et} \quad i < 2d \quad .$$

__Corollaire (6.2)__. __Sous l'une des conditions de__ (6.1), __lorsque__ $d \geq 2$, __l'homomorphisme de restriction__

$$H^2(X,\underline{G}_m)(\ell) \xrightarrow{\sim} H^2(X-Y,\underline{G}_m)(\ell)$$

__est bijectif__, __et__

$$H^3(X,\underline{G}_m)(\ell) \longrightarrow H^3(X-Y,\underline{G}_m)(\ell)$$

__est injectif__ ; __lorsque__ $d = 1$, __i.e.__ Y __est un diviseur__, __alors on a la suite exacte__ (__contenant essentiellement celle de prop__. (2.1)) :

$$0 \to H^2(X,\underline{G}_m)(\ell) \to H^2(X-Y,\underline{G}_m)(\ell) \to H^1(Y_i,\underline{Q}_\ell/\underline{Z}_\ell) \to H^3(X,\underline{G}_m)(\ell) \to$$
$$\to H^3(X-Y,\underline{G}_m)(\ell) \quad .$$

En effet, dans le cas $d \geqslant 2$ on aura $\underline{H}^i_Y(\underline{G}_m)(\ell) = 0$ pour $i \leqslant 3$ d'où $H^i_Y(X,\underline{G}_m)(\ell) = 0$ pour $i \leqslant 3$; dans le cas $d = 1$ la suite spectrale (6.2) donne aisément

(6.11) $\quad H^3_Y(X,\underline{G}_m)(\ell) \xrightarrow{\sim} H^2(Y,\underline{Z}_Y)(\ell) \xleftarrow{\sim} H^1(Y,\underline{Q}/\underline{Z})(\ell) = H^1(Y,\underline{Q}_\ell/\underline{Z}_\ell) \quad ,$

compte tenu de $H^1(Y,\underline{Z}) = 0$, d'où aussitôt (6.2).

7. Invariance birationnelle du groupe de Brauer.

Théorème (7.1). Soient X un préschéma régulier, Y un sous-préschéma fermé régulier, X' le préschéma déduit de X en faisant éclater Y [EGA II 8.1.3] , ℓ un nombre premier. On suppose qu'on est sous l'une des conditions suivantes :

a) ℓ est distinct des caractéristiques résiduelles de Y .

b) Le couple (X,Y) satisfait au théorème de pureté pour le groupe de Brauer, relativement à ℓ (cf n° 6).

Sous ces conditions, l'homomorphisme canonique

$$\mathrm{Br}'(X)(\ell) \longrightarrow \mathrm{Br}'(X')(\ell)$$

est un isomorphisme (où $\mathrm{Br}'(\ )$ désigne $H^2(\ ,\underline{G}_m)$, le groupe de Brauer cohomologique).

Signalons tout de suite les corollaires suivants :

Corollaire (7.2). Soit $f : X \longrightarrow Y$ un morphisme propre birationnel de préschémas réguliers noethériens de dimension $\leqslant 2$. Alors l'application induite $Br(Y) \longrightarrow Br(X)$ est bijective.

On peut en effet supposer X et Y intègres et de dimension 2. On sait alors [2] que f se factorise en un composé fini de morphismes $X_i \longrightarrow X_{i-1}$, tel que X_i se déduise de X_{i-1} en faisant éclater un point fermé y_{i-1} . Comme le couple (X_{i-1}, y_{i-1}) satisfait au théorème de pureté pour le groupe de Brauer, en vertu de (6.1 b), il s'ensuit par (7.1 b) que $Br(X_{i-1}) \longrightarrow Br'(X_i)$ est bijectif pour tout i , donc le composé $Br'(Y) \longrightarrow Br'(X)$ l'est également. On conclut grâce à (BR II 2.2) qui permet d'identifier les Br' aux Br .

Corollaire (7.3). Soit $f : X \longrightarrow Y$ un morphisme birationnel de préschémas réguliers excellents [EGA IV 7.8.2] de caractéristique nulle. Alors l'homomorphisme induit $Br'(Y) \longrightarrow Br'(X, \underline{G}_m)$ sur les groupes de Brauer cohomologiques est un isomorphisme.

En effet, en vertu de la théorie de HIRONAKA [21] , on sait (*) qu'il existe un morphisme propre birationnel $X' \longrightarrow X$, tel que X' puisse se déduire de X et de Y par deux suites d'éclatements du type envisagé dans (7.1). Ceci nous ramène au cas où $f : X \longrightarrow Y$ est défini par un tel éclatement, cas qui est justiciable de (7.1 a).

Démonstration de (7.1). Nous prouverons dans l'un et l'autre cas en-

(*) C'est apparemment un malentendu de la part de l'auteur; néanmoins, on signale plus bas qu'une autre démonstration de 7.3 peut être donnée, cf. (7.4).

visagé la relation

$$R^2 f_*(\underline{G}_m)(\not{y}) = 0 \quad . \tag{7.1}$$

On a d'autre part aussitôt les relations

$$f_*(\underline{G}_{m\ X'}) = \underline{G}_{m\ X} \quad , \tag{7.2}$$

$$R^1 f_*(\underline{G}_{m\ X'}) = \coprod_{i \in I} \underline{Z}_{Y_i,X} \quad , \tag{7.3}$$

où Y_i parcourt les composantes irréductibles de codimension $\geqslant 2$ de Y. Les deux relations précédentes nous fournissent, via la suite spectrale de Leray, la suite exacte

$$0 \to \mathrm{Pic}(X) \to \mathrm{Pic}(X') \to \underline{Z}^I \to H^2(X,\underline{G}_m) \to H^2(X',\underline{G}_m) \to H^o(X,R^2 f_*(\underline{G}_m)),$$

compte tenu que $H^1(Y_i,\underline{Z}) = 0$ pour tout i. Comme l'homomorphisme $\mathrm{Pic}(X') \to \underline{Z}^I$ est surjectif comme on constate aussitôt, on conclut la suite exacte

$$0 \to H^2(X,\underline{G}_m) \to H^2(X',\underline{G}_m) \to H^o(X,R^2 f_*(\underline{G}_m)) \quad . \tag{7.4}$$

Ainsi le théorème (7.1) résulte aussitôt de cette suite exacte, et de la formule (7.1), que nous allons maintenant prouver.

Nous pouvons supposer X strictement local, et nous sommes alors ramenés à prouver que l'on a

$$H^2(X',\underline{G}_m)(\not{y}) = 0 \quad .$$

Or soit Y' l'image inverse de Y dans X', alors f induit un isomorphisme $X'-Y' \xrightarrow{\sim} X-Y$, donc sous la condition b) on conclut que $H^2(X'-Y',\underline{G}_m)(\not{y}) = 0$, et comme d'autre part $H^2(X',\underline{G}_m) \to$

$\longrightarrow H^2(X'-Y',\underline{G}_m)$ est injectif (BR II 1.8) on en conclut bien $H^2(X',\underline{G}_m) = 0$. Supposons maintenant satisfaite la condition a), i.e. ℓ distinct de la caractéristique résiduelle de X . Alors en vertu de la suite exacte de Kummer (BR II 3.1) on est réduit à prouver que l'application "classe de cohomologie associée"

$$(*) \qquad \mathrm{Pic}(X') \longrightarrow H^2(X', \mu_{\ell^n})$$

est surjective. Or on sait par le "théorème de changement de base pour un morphisme propre" (SGAA XII 5.5) que l'on a un isomorphisme

$$H^2(X', \mu_{\ell^n}) \longrightarrow H^2(X'_o, \mu_{\ell^n})$$

par l'homomorphisme de restriction, où $X'_o \simeq P^r_{k(y)}$ est la fibre de X' en le point fermé y de X , qui est ici un espace projectif sur $k(y)$. On sait alors que $H^2(X'_o, \mu_{\ell^n}) \simeq \underline{Z}/\ell^n\underline{Z}$, l'isomorphisme étant donné à l'aide de la classe de 2-cohomologie associé au générateur canonique de $\mathrm{Pic}(X'_o)$. Comme ce générateur est dans $\mathrm{Im}(\mathrm{Pic}(X') \to \mathrm{Pic}(X'_o))$, de façon précise est induit par le faisceau inversible sur X' associé au diviseur $-Y'$ (comme il est bien connu), il s'ensuit bien que (*) est surjective, ce qui achève la démonstration de (7.1).

La démonstration donnée plus haut pour (7.3) n'utilise pas le théorème de pureté cohomologique, assez délicat dans le cas invoqué dans (6.1 d) et dû alors à M. ARTIN (SGA 4 XX), mais "seulement" la résolution des singularités de HIRONAKA (*). **Une démonstration différente** via la pureté cohomologique, analogue à celle de (7.1 a), permet d'obtenir d'autre part un résultat plus général, sans utiliser nécessairement la résolution des singularités :

(*) sous une forme erronée de plus, comme on l'a signalé plus haut!

Théorème (7.4). Soient X , Y *deux préschémas sur un préschéma localement noethérien* S , $f : X \dashrightarrow Y$ *une* S *-application rationnelle,* ℓ *un nombre premier. Supposons* Y *propre sur* S , X *régulier, et que pour tout sous-préschéma fermé* Z *de codimension* $\geqslant 2$ *dans* X , *le couple* (X,Z) *satisfasse au théorème de pureté pour le groupe de Brauer, relativement à* ℓ (cf. (6.1)). *Alors il existe un unique morphisme* $Br'(Y)(\ell) \longrightarrow Br'(X)(\ell)$ *rendant commutatifs les diagrammes*

$$\begin{tikzcd}
Br'(Y)(\ell) \arrow[r] \arrow[d] & Br'(X)(\ell) \arrow[d] \\
Br'(f(x))(\ell) \arrow[r] & Br'(x)(\ell)
\end{tikzcd} ,$$

où x *est un point maximal de* X . *Lorsque* Y *est également régulier et satisfait la même hypothèse de pureté que* X , *que* X *est également propre sur* S , *et si on suppose de plus que* f *est birationnel, alors* $Br'(Y)(\ell) \longrightarrow Br'(X)(\ell)$ *est un isomorphisme.*

L'unicité provient du fait que en vertu de (BR II 1.8), l'application naturelle de $Br'(X)$ dans le produit des $Br(x)$ (x parcourant les maximaux de X) est injectif, X étant régulier. Pour l'existence, utilisant la propreté de Y sur S , on voit qu'il existe un ouvert U de X , dont le complémentaire est de codimension $\geqslant 2$, tel que f soit définie sur U , d'où un morphisme $Br'(Y) \longrightarrow Br'(U)$ donc $Br'(Y)(\ell) \longrightarrow Br'(U)(\ell)$. Comme d'après l'hypothèse de pureté, l'application $Br'(X)(\ell) \longrightarrow Br'(U)(\ell)$ est bijective, on gagne. La dernière assertion de (7.4) résulte immédiatement de la première, appliquée à f et à f^{-1} .

Corollaire (7.5). Soit k un corps, et X un schéma régulier variable, propre sur k. Si $\dim X \leqslant 2$, alors $Br'(X) = Br(X)$ est un invariant birationnel en X, et il en est de même de $Br'(X)(\ell)$ pour tout $\ell \neq \text{car } k$, sans hypothèse sur la dimension de X.

Résulte aussitôt de (7.4) et de (6.1 b) c)).

Remarques (7.6).

a) Compte tenu des observations faites au n° 6, il est possible que les hypothèses de pureté faites dans (7.4) soient conséquence des autres, de sorte que $Br'(X)$ soit toujours un invariant birationnel pour les schémas réguliers et propres sur une base S donnée. Le premier cas douteux se présente pour un schéma projectif et lisse de dimension 3, sur un corps algébriquement clos de car. $p > 0$, pour la composante p-primaire du groupe $Br'(X)$. - Bien entendu, la démonstration de (7.4) via le théorème de pureté est exactement la même que la démonstration classique établisssant l'invariance birationnelle du groupe fondamental ou des espaces de différentielles $H^0(X,\underline{\Omega}^i_{X/k})$ pour des schémas propres et lisses sur un corps k, via les théorèmes de pureté correspondants.

b) L'argument de (7.3), utilisant le théorème de structure de HIRONAKA pour les morphismes birationnels propres de schémas réguliers, s'il n'est pas indispensable dans le contexte présent, s'insère cependant parmi d'autres résultats de nature cohomologique utilisant le même principe, et dont le premier est dû à HIRONAKA lui-même : si $f : X \longrightarrow Y$ est un morphisme propre birationnel de préschémas réguliers, alors $R^i f_*(\underline{O}_X) = 0$ pour tout $i > 0$. Signalons également que pour tout $y \in Y$, la fibre géométrique $X_{\bar{y}}$ a tous ses groupes de cohomologie de dimension impaire nuls (coefficients finis constants)(*). Dans le cas du H^1 , ce résultat peut se préciser en la relation $\pi_1(X_{\bar{y}}) = 0$, dont une démonstration directe, via le théorème de pureté de Zariski-Nagata et le "théorème de spécialisation pour le π_1" (SGA4 XII), indépendante de la résolution, est immédiate. Notons en passant que le résultat sur le H^1 qu'on vient de signaler équivaut au fait que $\underline{\mathrm{Pic}}^{\circ}_{X_y/k(y)}$ (voir [16 V] pour la définition) est un groupe algébrique <u>unipotent</u> (au sens général de (SGA 3 XVII)), et on peut se demander si ce groupe est même nécessairement nul ; c'est vrai en tous cas si $\dim X_y = 1$.

8. Groupe de Brauer et dualité.

Je renvoie à l'exposé de TATE [32] pour les relations de dualité dans le groupe de Brauer d'une surface projective lisse sur un corps fini, liées à la dualité de CASSELS dans le groupe de Tate-Chafarévitch. Nous nous bornons ici à quelques remarques sur des relations de dualité dans le groupe de Brauer dans des cas proprement "géométriques" (corps de base ou corps résiduel algébriquement clos).

8.1. Précisons d'abord les relations entre le groupe de Brauer cohomologique $\mathrm{Br}'(X)$ et la cohomologie ℓ-adique. De façon générale, si M est un groupe, et ℓ un nombre premier, posons avec TATE

$$T_{\ell}(M) = \varprojlim_{\nu} {}_{\ell^{\nu}}M \quad , \tag{8.1}$$

(*) **Précisons que ces résultats se démontrent en utilisant la résolution sous la forme effectivement établie par Hironaka!**

où pour tout entier n , ${}_nM$ désigne le noyau de la multiplication par n . Lorsque le sous-groupe de ℓ -torsion $M(\ell)$ de M est de cotype fini, i.e. isomorphe à un sous-groupe d'un $(\underline{Q}_\ell/\underline{Z}_\ell)^n$, ce qui équivaut aussi à ${}_\ell M$ fini, alors $T_\ell(M)$ (qui de toute façon ne dépend que de $M(\ell)$) est un module <u>libre de type fini</u> sur $\underline{Z}_\ell$. Sa connaissance équivaut alors à la connaissance du plus grand sous-groupe divisible $M(\ell)^\circ$ de $M(\ell)$, qui est aussi le plus petit sous-groupe d'indice fini de $M(\ell)$. En effet, d'une part $T_\ell(M)$ est aussi isomorphe à $T_\ell(M(\ell)^\circ)$, par l'inclusion canonique $M(\ell)^\circ \longrightarrow M$, et d'autre part $M(\ell)^\circ$ est canoniquement isomorphe à $T_\ell(M) \otimes_{\underline{Z}_\ell} \underline{Q}_\ell / T_\ell(M)$. Supposons par exemple que

(8.2) $$M = H^i(X, \mu_{\ell^\infty}) \overset{\text{dfn}}{=} \varinjlim_\nu H^i(X, \mu_{\ell^\nu}) \quad ,$$

où X est un préschéma tel que

$$H^{i-1}(X, \mu_\ell) \text{ et } H^i(X, \mu_\ell) \text{ sont finis,}$$

alors par passage à la limite projective dans les suites exactes

$$0 \to H^{i-1}(X, \mu_{\ell^\infty})_\ell \to H^i(X, \mu_{\ell^\nu}) \to {}_{\ell^\nu} H^i(X, \mu_{\ell^\infty}) \to 0$$

on trouve une suite exacte canonique (où $\underline{Z}_\ell\,[1] = \varprojlim_\nu \mu_{\ell^\nu}$ est le faisceau ℓ -adique de TATE) :

(8.3) $$0 \to t^{i-1}(X,\ell) \to H^i(X,\underline{Z}_\ell\,[1]) \to T_\ell(H^i(X, \mu_{\ell^\infty})) \to 0 \quad ,$$

où on a posé

(8.4) $$t^{i-1}(X,\ell) = H^{i-1}(X, \mu_{\ell^\infty})/H^{i-1}(X, \mu_{\ell^\infty})^\circ$$

qui est donc un groupe fini de ℓ -torsion, et s'identifie donc, par

(8.3), au sous-module de torsion du $\underline{Z}_\ell$ -module de type fini

(8.5) $$H^i(X,\underline{Z}_\ell[1]) = \lim H^i(X, \mu_{\ell^\nu}) \quad ,$$

dont la partie libre s'identifie, à son tour, à $T_\ell(H^i(X, \mu_{\ell^\infty}))$.
On en déduit également un isomorphisme

(8.6) $$(H^i(X, \mu_{\ell^\infty}))^\circ \simeq H^i(X,\underline{Z}_\ell[1]) \otimes_{\underline{Z}_\ell} \underline{Q}_\ell \,/\, \operatorname{Im} H^i(X,\underline{Z}_\ell[1]) \quad ,$$

qui montre que $H^i(X, \mu_{\ell^\infty})$ et $H^i(X,\underline{Z}_\ell[1])$ se déterminent mutuellement mod groupes finis.

8.2. Un passage à la limite analogue dans la suite exacte de Kummer (BR II 3.1) nous donne de même une suite exacte

(8.7) $$0 \to NS(X) \otimes_{\underline{Z}} \underline{Z}_\ell \to H^2(X,\underline{Z}_\ell[1]) \to T_\ell(Br'(X)) \to 0 \quad ,$$

en supposant maintenant que $Pic(X)$ est extension d'un groupe de type fini $NS(X)$ (le <u>groupe de Néron-Sévéri</u>) par un groupe divisible, et que $H^2(X,\underline{Z}/\ell\underline{Z})$ est fini. On trouve en passant le fait, classique dans la théorie transcendante, que la composante ℓ -primaire du sous-groupe de torsion de $NS(X)$ est isomorphe au sous-groupe de torsion de $H^2(X,\underline{Z}_\ell[1])$, en même temps qu'on précise du point de vue de la cohomologie ℓ -adique la relation entre le groupe de Brauer (ou plus précisément, $T_\ell(Br'(X))$) et la "partie transcendante" du H^2 , comparer (BR II 3 passim).

Lorsque X est une surface propre, lisse et connexe sur un corps k algébriquement clos, il y a lieu de considérer sur le terme médian de (8.7) la forme bilinéaire symétrique canonique, fournie par le cup-produit, qui est à valeurs dans

$$H^4(X,\underline{Z}_\ell [2]) \simeq \underline{Z}_\ell \quad .$$

Cette forme (en négligeant la torsion du H^2) est non dégénérée, et induit sur $NS(X) \otimes_{\underline{Z}} \underline{Z}_\ell$ la forme bilinéaire déduite de la <u>forme intersection</u> sur $NS(X)$, provenant de la multiplicité globale d'intersections de diviseurs sur X [15] . D'après MATSUSAKA [27] , cette dernière forme est non dégénérée. Tensorisant alors la suite exacte (8.7) par $\underline{Q}_\ell$, on trouve que $T_\ell(Br\ (X)) \otimes_{\underline{Z}_\ell} \underline{Q}_\ell$ <u>s'identifie canoniquement à l'orthogonal de</u> $NS(X) \otimes_{\underline{Z}_\ell} \underline{Q}_\ell$ <u>dans</u> $H^2(X,\underline{Q}_\ell [1])$, <u>et que le cup-produit définit sur cet espace une forme quadratique non dégénérée</u>. L'interprétant comme une forme quadratique sur $T_\ell(Br(X))$ à valeurs dans $\underline{Q}_\ell$, (et tenant compte que le cup-produit induit même une autodualité de H^2/torsion) on trouve aisément que cette forme est à valeurs dans $\underline{Z}_\ell$ si et seulement si le discriminant de la forme intersection sur $NS(X)$/torsion est une unité ℓ-adique - condition qui est vérifiée donc pour presque tous les nombres premiers ℓ -, et que dans ce cas on trouve une autodualité de $T_\ell(Br(X))$.

8.3. Ce résultat ne concerne essentiellement que la partie divisible $Br'(X)^o$ du groupe de Brauer cohomologique. On peut également donner une relation de dualité concernant le groupe fini $Br'(X)/Br'(X)^o$, qui grâce à la suite exacte de Kummer (BR II 3.1) s'explicite comme

(8.8) $$Br'(X)/Br'(X)^o \simeq H^2(X, \mu_{\ell^\infty})/H^2(X, \mu_{\ell^\infty})^o \quad ,$$

(compte tenu que $Pic(X) \otimes \underline{Q}_\ell/\underline{Z}_\ell = NS(X) \otimes \underline{Q}_\ell/\underline{Z}_\ell$ est divisible). Utilisant (8.3) pour $i = 3$, on trouve donc

(8.9) $$Br'(X)/Br'(X)^o \simeq \mathrm{Tors}\ H^3(X,\underline{Z}_\ell [1]) \quad ,$$

valable indépendamment des hypothèses particulières posées au début de l'alinéa précédent pour X . Lorsque celles-ci sont vérifiées, alors les relations de dualité, bien connues dans le cas classique, et qui résultent aisément par passage à la limite des résultats de dualité [SGA 4 XIX] pour des coefficients de torsion, donnent des accouplements de dualité

$$(8.10) \qquad \mathrm{Tors}\, H^i(X,\underline{Z}_\ell) \times H^{2n+1-i}(X,\underline{Z}_\ell[n]) \longrightarrow \underline{Q}_\ell/\underline{Z}_\ell \quad ,$$

(où $n = \dim X$), qui nous donne en particulier, faisant $n = 2$ et $i = 3$, et tenant compte de l'isomorphisme déjà signalé

$$NS(X)(\ell) \simeq \mathrm{Tors}\, H^2(X,\underline{Z}_\ell(1))$$

ainsi que de (8.9), l'accouplement de dualité

$$(8.11) \qquad Br(X)/Br(X)^\circ \times NS(X)(\ell) \longrightarrow \underline{Q}_\ell/\underline{Z}_\ell \quad ,$$

qui fournit donc un isomorphisme

$$(8.12) \qquad Br(X)/Br(X)^\circ \simeq \mathrm{Hom}(NS(X)(\ell),\underline{Q}/\underline{Z}) \quad ,$$

(où, rappelons-le, $NS(X)(\ell)$ est le sous-groupe de ℓ -torsion de $NS(X)$) .

On a des résultats analogues pour $\dim X \geqslant 3$, mais pour définir alors une forme quadratique remarquable sur $T_\ell(Br'(X))$, à valeurs dans $\underline{Q}_\ell$, il faut utiliser une polarisation de X , dont la classe de cohomologie ℓ -adique $\xi \in H^2(X,\underline{Z}_\ell[1])$ permet alors de définir une forme bilinéaire symétrique $(x,y) \longmapsto xy\,\xi^{n-2}$ sur $H^2(X,\underline{Z}_\ell[1])$, à valeurs dans $\underline{Z}_\ell$.

8.4. Supposons maintenant que X soit le spectre d'un anneau local normal complet A, de dimension 2, à corps résiduel k algébriquement clos, et supposons que l'on peut "résoudre" X, i.e. qu'il existe un morphisme propre et birationnel

$$f : X' \longrightarrow X \quad ,$$

avec X' régulier, induisant un isomorphisme $X' | U = U' \xrightarrow{\sim} U$, où

$$U = X - (x) \quad ,$$

x étant le point fermé de X. Supposons de plus que k ait été relevé en un sous-corps de A, de sorte que A est une k-algèbre (cette hypothèse n'étant sans doute pas essentielle). Comme il a été signalé dans [SGA 2, XIII 5] on peut sous ces conditions construire canoniquement un schéma en groupes lisse et de type fini sur k, soit $\underline{\mathrm{Pic}}_U$, et un isomorphisme

$$(8.13) \qquad \mathrm{Pic}(U) = \underline{\mathrm{Pic}}_U(k)$$

de $\mathrm{Pic}(U)$ avec le groupe des points à valeurs dans k de $\underline{\mathrm{Pic}}_U$. Cela nous fournit donc pour $\mathrm{Pic}(U)$ une structure d'extension

$$(8.14) \qquad 0 \to \mathrm{Pic}(U)^{\circ} \to \mathrm{Pic}(U) \to \mathrm{NS}(U) \to 0 \quad ,$$

où on a posé

$$(8.15) \qquad \mathrm{Pic}(U)^{\circ} = \underline{\mathrm{Pic}}_U{}^{\circ}(k) \quad , \quad \mathrm{NS}(U) = \underline{\mathrm{NS}}_U(k) \quad ,$$

$\underline{\mathrm{Pic}}_U{}^{\circ}$ désignant la composante neutre de $\underline{\mathrm{Pic}}_U$, et $\underline{\mathrm{NS}}_U$ le quotient de $\underline{\mathrm{Pic}}_U$ par cette composante. La construction indiquée dans loc. cit. permet d'ailleurs de préciser la structure de $\mathrm{NS}(U)$, en introduisant la matrice d'intersection

$$(C_i . C_j)_{1 \leqslant i,j \leqslant r}$$

définie par les r composantes irréductibles C_i de $f^{-1}(x)_{\text{réd}}$ sur le schéma régulier X' : en vertu de MUMFORD [28], cette matrice est définie négative, donc le conoyau de l'homomorphisme

$$\underline{Z}^r \longrightarrow \underline{Z}^r$$

qu'elle définit est un groupe fini, dont l'ordre n'est autre que la valeur absolue du déterminant de cette matrice. Ceci posé, on trouve que $NS(U)$ est canoniquement isomorphe à ce groupe fini. La matrice envisagée étant symétrique, on voit aussitôt que ce groupe est canoniquement autodual (par un accouplement symétrique à valeurs dans $\underline{Q}/\underline{Z}$), d'où une autodualité symétrique

(8.16) $$NS(U) \times NS(U) \longrightarrow \underline{Q}/\underline{Z} \quad ,$$

dont on constate aisément qu'elle est indépendante de la résolution X' choisie.

Si maintenant ℓ est un nombre premier distinct de car k, alors la structure connue des groupes algébriques commutatifs connexes sur k [9, exp. 4] montre que $Pic(U)^o$ est un groupe ℓ-divisible, donc la suite exacte (8.14) nous donne, pour toute puissance $n = \ell^{\nu}$ de ℓ, une suite exacte

(8.17) $$0 \to {}_nPic(U)^o \to {}_nPic(U) \to {}_nNS(U) \to 0 \quad .$$

Comparons cette suite exacte avec la suite exacte de Kummer

$$0 \to \mathrm{Pic}(U)_n \to H^2(U, \mu_n) \to {}_n\mathrm{Br}(U) \to 0 \quad ,$$

où pour tout groupe M , on pose $M_n = M/nM$. Utilisant (8.14) et le fait que $\mathrm{Pic}(U)^o$ est ℓ -divisible, on trouve $\mathrm{Pic}(U)_n \simeq NS(U)_n$, de sorte que la suite s'écrit aussi

$$(8.18) \qquad 0 \to NS(U)_n \to H^2(U, \mu_n) \to {}_n\mathrm{Br}(U) \to 0 \quad .$$

Je dis que <u>les suites exactes</u> (8.17) <u>et</u> (8.18) <u>sont duales l'une de l'autre</u>, du moins si car $k = 0$. Pour s'en convaincre, notons qu'on a aussi, grâce à la suite exacte de Kummer, un isomorphisme

$$(8.19) \qquad {}_n\mathrm{Pic}(U) = H^1(U, \mu_n) \quad ,$$

donnant une interprétation cohomologique du terme médian de (8.17). D'autre part, on a un accouplement par cup-produit

$$(8.20) \qquad H^1(U, \mu_n) \times H^2(U, \mu_n) \longrightarrow H^3(U, \mu_n) \quad ,$$

et un isomorphisme canonique :

$$H^3(U, \mu_n) \simeq \underline{Z}/n\underline{Z} \quad ,$$

moyennant lequel (8.20) devient une dualité (Théorème de dualité locale [SGA 5 I]). Ainsi les termes médians de (8.17) et (8.18) sont duals l'un de l'autre. Il resterait à vérifier que dans cet accouplement, $NS(U)_n$ et ${}_n\mathrm{Pic}(U)^o$ s'annulent mutuellement, et que l'accouplement

$$NS(U)_n \times {}_nNS(U) \longrightarrow \underline{Z}/n\underline{Z}$$

qui s'en déduit par passage au quotient est aussi celui qui est déduit de l'autodualité canonique (8.16). Il en résultera que cet accouplement est non dégénéré, donc une dualité, et que $NS(U)_n$ et ${}_nPic(U)^o$ sont exactement annulateurs l'un de l'autre, ce qui prouve notre assertion. On trouve alors un accouplement

$$(8.21) \qquad {}_nBr(U) \times {}_nPic(U)^o \longrightarrow \underline{Q}/\underline{Z}$$

qui est une dualité parfaite. Passant à la limite sur n, on peut écrire ceci comme un isomorphisme canonique

$$(8.22) \qquad Br(U)(\ell) \xrightarrow{\sim} Hom(T_\ell(\underline{Pic}_U{}^o(k)), \underline{Q}_\ell/\underline{Z}_\ell) \quad .$$

On en conclut en particulier que $Br(U)(\ell)$ est un groupe <u>divisible</u>, (compte tenu de la structure des groupes algébriques commutatifs sur k).

<u>Remarques (8.5)</u>. Pour que la démonstration qui précède soit complète, il faudrait faire la vérification signalée plus haut. Le rédacteur avoue qu'il ne l'a pas faite, mais pense qu'elle ne doit pas offrir de difficulté. Bien entendu, la restriction car $k = 0$ ne nous a servi que via l'utilisation du théorème de dualité locale, qui reste sans doute valable sans cette hypothèse. (La difficulté technique, non surmontée à l'heure actuelle, est dans la démonstration du théorème de pureté cohomologique sur un schéma régulier de dimension 2 ...) Enfin, il y aurait lieu d'analyser ce qu'on peut dire lorsqu'on ne suppose plus k algébriquement clos, par exemple lorsque k est fini.

9. Généralisation du groupe de Brauer : invariants birationnels cohomologiques supérieurs.

9.1. Le groupe de Brauer cohomologique $Br'(X)$ d'un préschéma X s'insère dans la suite infinie d'invariants cohomologiques $H^i(X, \underline{G}_m)$, $i \geqslant 0$. Cependant parmi ceux-ci seul le $H^2 = Br'$ possède une propriété d'invariance birationnelle (n° 7), et d'ailleurs pour $i \geqslant 3$, ils coïncident pour l'essentiel avec les invariants $H^i(X, \mu_{\ell^\infty})$ (GB II 3.2) et ne peuvent donc être considérés comme des invariants originaux. C'est donc dans une autre direction qu'il convient de chercher une généralisation adéquate, de nature cohomologique également, du groupe de Brauer. Les invariants que nous allons définir constituent en un sens l'équivalent, dans le contexte de la cohomologie ℓ-adique, des invariants que fournit la considération des classiques "<u>différentielles de deuxième espèce</u>" dans le contexte de la cohomologie de Hodge - De Rham [6] [19]. Le lien explicite entre les deux types d'invariants (qui fournissent des vectoriels de même rang, sur le corps $\underline{Q}_\ell$ d'une part, sur le corps de base de la variété envisagée X d'autre part) est donnée, lorsque le corps de base est le corps des complexes, par la considération de la cohomologie transcendante à coefficients entiers, qui permet (en calquant dans ce contexte les définitions qui vont suivre) de définir des invariants birationnels cohomologiques analogues "à coefficients entiers", qui fourniront alors les deux types d'invariants précédents par simple extension des scalaires $\underline{Z} \dashrightarrow \underline{Z}_\ell$ et $\underline{Z} \dashrightarrow \underline{C}$. Lorsque le corps de base n'est plus le corps des complexes, et qu'on ne dispose pas de constructions transcendantes liées à la topologie de $\underline{C}$, il y aurait lieu, pour exprimer encore les liens entre ces deux types d'invariants, de faire appel à la "théorie des motifs", en définissant l'un et l'autre comme étant respectivement la "réalisation ℓ-adique" et la "réalisation de De-Rham" d'un même motif, dont la connaissance est considérablement plus riche que celle des deux invariants précédents auxquels il donne naissance. Ainsi, pour la dimension 1, elle équivaut à la connaissance de la variété d'Albanese A de X, qui donne naissance d'une part au module de Tate $T_\ell(A') \simeq H^1(X,\underline{Z}_\ell[1])$, d'autre part à la cohomologie de De Rham de A, isomorphe (si le corps de base est de caractéristique nulle) à celle de X. Comme la théorie des motifs est à l'heure actuelle purement conjecturale, et qu'elle n'a encore fait l'objet d'aucun exposé publié, nous nous bornons à ces allusions concernant la nature plus profonde des invariants qui nous intéressent.

9.2. Dans la suite, nous supposons fixé un corps de base k. Soient $f : X' \longrightarrow X$ un morphisme birationnel, avec X lisse sur k, U un ouvert de X tel que le morphisme induit $f^{-1}(U) = U' \longrightarrow U$ soit un isomorphisme. Soit d'autre part F un faisceau de torsion localement constant (pour la topologie étale) sur X, premier à la caractéristique, et désignons par F' son image inverse sur X. On a alors le diagramme commutatif d'applications canoniques

$$\begin{array}{ccc} H^i(X,F) & \xrightarrow{g^i} & H^i(U,F \mid U) \\ \downarrow & & \downarrow \wr \\ H^i(X',F') & \xrightarrow{g'^i} & H^i(U',F' \mid U') \end{array} \tag{9.1}$$

où la deuxième flêche verticale est un isomorphisme, et nous servira à identifier les deux termes correspondants. Ceci posé, on a la relation

$$\mathrm{Im}\, g^i = \mathrm{Im}\, g'^i \quad . \tag{9.2}$$

Pour le voir, on insère (9.1) dans un homomorphisme de suites exactes de cohomologie relative (où $Y = X-U$, $Y' = X'-U' = f^{-1}(Y')$) :

$$\begin{array}{ccccc} H^i(X,F) & \longrightarrow & H^i(U,F\mid U) & \longrightarrow & H^{i+1}_Y(X,F) \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ H^i(X',F') & \longrightarrow & H^i(U',F'\mid U') & \longrightarrow & H^{i+1}_{Y'}(X',F') \end{array} \quad ,$$

et tout revient à prouver que l'homomorphisme $H^{i+1}_Y(X,F) \to H^{i+1}_{Y'}(X',F')$ est injectif. Ceci est vrai en fait pour toute partie fermée Y de X (indépendamment de l'hypothèse particulière faite sur U), en fait on va définir un homomorphisme canonique

$$H^j_{Y'}(X',F') \to H^j_Y(X,F) \quad , \tag{9.3}$$

inverse à gauche de l'homomorphisme $H^j_Y(X,F) \longrightarrow H^j_{Y'}(X',F')$. Nous utilisons la théorie de dualité sous la forme donnée dans [SGA 4 XIX] , [SGA 5 I] . Utilisant l'hypothèse de lissité sur X et la nature de F , on constate que $R^!f(F)$ est un complexe sur X' dont les faisceaux de cohomologie sont nuls en dimension <0 , et dont le faisceau de cohomologie en dimension 0 s'identifie à $h_*(F'\mid V')$, où V' est l'ouvert des points lisses de X' et $h : V' \longrightarrow X'$ l'inclusion. On trouve donc un homomorphisme canonique $F' \to \underline{H}^0(R^!f(F))$, qui grâce à ce qui précède s'interprète comme un homomorphisme

$$F' \longrightarrow R^!f(F) \quad ,$$

dont la donnée équivaut, grâce au théorème de dualité globale pour le morphisme f , à la donnée d'un homomorphisme

$$(9.4) \qquad Rf_*(F') \longrightarrow F \quad .$$

On a d'autre part l'homomorphisme canonique évident

$$(9.5) \qquad F \longrightarrow Rf_*(F') \quad ,$$

puisque $F' = f^*(F)$, et on constate aussitôt que le composé

$$F \longrightarrow Rf_*(F') \longrightarrow F$$

est l'identité (en regardant ce qui se passe sur le plus grand ouvert W de X au-dessus duquel f est un isomorphisme, ouvert dense puisque f est birationnel). Transformant (9.4) et (9.5) par le foncteur $R\Gamma_Y$, dérivé du foncteur Γ_Y "sections à support dans Y" , on trouve des homomorphismes de complexes de groupes abéliens

$$R\Gamma_Y(F) \longrightarrow R\Gamma_Y(Rf_*(F')) \simeq R\Gamma_{Y'}(F') \longrightarrow R\Gamma_Y(F)$$

dont le composé est égal à l'identité dans la catégorie dérivée. Passant aux groupes de cohomologie, on trouve (9.3) avec la propriété demandée.

9.3. Partons maintenant avec un schéma lisse de type fini U sur k , muni d'un faisceau de torsion G localement constant, premier à la caractéristique. Supposons de plus que U puisse être inclus comme ouvert dense d'un schéma propre et lisse X sur k . (C'est certainement le cas si k est de caractéristique nulle, grâce à la résolution des singularités de HIRONAKA [21] , et également si k est parfait et $\dim X \leqslant 2$, grâce à ABHYANKAR [1]). Supposons de plus que G soit alors restriction d'un faisceau localement constant F sur X ; un argument bien connu, utilisant le théorème de pureté de ZARISKI-NAGATA [SGA 2, X 3.4] pour le groupe fondamental, montre que cette hypothèse ne dépend pas du choix particulier de X . Considérons alors l'image

$$H^i_\wedge(U,G) = \mathrm{Im}\,(H^i(X,F) \longrightarrow H^i(U,G)) \quad . \tag{9.6}$$

Je dis que <u>cette dernière ne dépend pas du choix de</u> X (ce qui justifie la notation qu'on vient d'introduire).

Soit en effet X' une autre compactification propre et lisse de U . Il existe alors une compactification normale X'' de X qui "coiffe" à la fois X et X' , i.e. munie de morphismes $X'' \longrightarrow X$ et $X'' \longrightarrow X'$ qui induisent l'identité sur U . On est donc ramené à voir que $H^i(X,F)$ et $H^i(X'',F'')$ ont même image dans $H^i(U,G)$, ce qui a été vu en effet dans (9.2).

9.4. L'invariant $H^i_\wedge(U,G)$ qu'on vient de définir se comporte évidemment comme un foncteur contravariant en le couple (U,G) (au sens habituel en cohomologie des faisceaux), en particulier, si V est un ouvert de U , on trouve un homomorphisme de restriction (évidemment surjectif)

$$H^i_\wedge(U,G) \longrightarrow H^i_\wedge(V,G) \quad .$$

Supposons maintenant U irréductible, de corps de fractions K . Comme d'habitude, nous désignons par G_K la restriction de K au point générique $\mathrm{Spec}(K)$ de U . Ceci dit, nous poserons

$$(9.7) \qquad H^i_{\wedge}(K,G_K) = \varinjlim_{V} H^i_{\wedge}(V,G) \quad ,$$

la limite étant étendue à la famille filtrante décroissante des ouverts non vides V de U . Il est clair, d'après ce qui précède, que $H^i(K,G_K)$ est un invariant de l'extension de type fini K de k et du faisceau de torsion étale G_K sur $\mathrm{Spec}(K)$, soumis à la condition que G_K soit induit par un faisceau localement constant F sur un modèle propre et lisse convenable X de K (ou, comme on dit encore, que F est "non ramifié" sur un tel modèle) ; ou ce qui revient au même, une fois admis l'existence d'un modèle propre et lisse X de K , que F soit non ramifié sur les modèles propres normaux "suffisamment grands" (pour la relation de domination) de K . Il a les mêmes propriétés fonctorielles en (K,G_K) que $H^i_{\wedge}(U,G)$ en (U,G) (ce qui permetrrait d'ailleurs, si on le désirait, d'étendre la définition à des extensions K de k qui ne sont pas nécessairement de type fini). Il résulte du théorème de finitude (SGA 4 XIV) que si G_K est un groupe fini, il en est de même des $H^i_{\wedge}(K,G_K)$, puisque ce sont des quotients des groupes finis $H^i(X,F)$; ce résultat se généralise de façon évidente au cas où G_K est un faisceau de Λ-modules constructible, sur un anneau Λ donné. Signalons aussi que si U est un ouvert affine, alors sa dimension cohomologique satisfait

$$\mathrm{cd}(U) \leqslant \dim U$$

(SGA 4 XIV), d'où on conclut pour nos invariants birationnels

$$(9.8) \qquad H^i_{\wedge}(K,G_K) = 0 \quad \text{si} \quad i > \text{deg.tr. } K/k \quad .$$

Un cas particulier intéressant, en fait le plus important pour nous, est celui où G_K est constant, et défini par un groupe de torsion ordinaire G , auquel cas la condition de non ramification imposée à G_K est automatiquement satisfaite. On écrira simplement $H^i_{\wedge}(K,G)$ au lieu de $H^i_{\wedge}(K,G_K)$. Lorsque k est algébriquement clos, ce cas comprend les faisceaux de la forme μ_{ℓ^ν} , μ_{ℓ^∞} qui s'introduisent en relation avec le groupe de Brauer.

Lorsque X est un schéma propre et lisse sur k , muni d'un faisceau de torsion F premier à la caractéristique, alors (K désignant le corps des fractions de X , supposé connexe) $H^i_{\wedge}(K,F_K)$ apparaît comme un quotient de $H^i(X,F)$, qu'on peut considérer (comme nous verrons plus bas (10.1)) comme le premier terme du gradué associé à $H^i(X,F)$ pour une filtration remarquable. C'est pourquoi nous écrirons aussi

$$(9.9) \qquad \mathrm{Gr}^0 H^i(X,F) = H^i_{\wedge}(X,F_K) \quad .$$

9.5. Les définitions et notations précédentes s'étendent de façon évidente lorsque on considère, soit des faisceaux qui sont limites inductives de faisceaux de torsion du type précédent, tels les faisceaux μ_{ℓ^∞} et plus généralement $\mu^{(n)}_{\ell^\infty} = \varinjlim_{\nu} \mu^{\otimes n}_{\ell^\nu}$, soit des "faisceaux ℓ-adiques constants tordus", définis par des systèmes projectifs "adiques" de faisceaux de $(\underline{Z}/\ell^{\nu+1}\underline{Z})$-modules localement constants F_ν , ou ce qui revient au même sur une base connexe X , par des représentations continues du groupe fondamental $\pi_1(X, \xi)$ de X (relativement à un point géométrique $\overline{\xi}$ donné) par des automorphismes de modules de type fini M sur $\underline{Z}_\ell$. Rappelons que dans ce deuxième cas, on pose <u>par définition</u>

$$H^i(X,F) = \varprojlim_{\nu} H^i(X,F_\nu) \quad ;$$

on définit alors les $H^i_\wedge(U,G)$ et $H^i_\wedge(K,G_K)$ par (9.6) et (9.7) respectivement. Parmi les faisceaux ℓ-adiques, un intérêt particulier s'attache évidemment aux faisceaux de TATE

$$\underline{Z}_\ell[n] = \varprojlim_\nu \mu_{\ell^\nu}^{\otimes n} \quad ,$$

qui sont d'ailleurs, lorsque k contient un corps algébriquement clos, isomorphes (non canoniquement) au faisceau ℓ-adique constant $\underline{Z}_\ell$.

9.6. Exemples en basses dimensions. Soit X propre et lisse sur k , et connexe, F un faisceau sur X du type envisagé dans les numéros précédents. Pour tout ouvert non vide U de X , il est bien connu que l'homomorphisme

$$(*) \qquad H^1(X,F) \longrightarrow H^1(U,F)$$

est injectif, ce qui montre que l'on a

$$(9.10) \qquad \mathrm{Gr}^o\, H^1(X,F) \simeq H^1(X,F) \quad .$$

On trouve en particulier, par la théorie de Kummer, si k algébriquement clos :

$$(9.11) \qquad \mathrm{Gr}^o H^1(X, \mu_{\ell^\infty}) = H^1(X, \mu_{\ell^\infty}) \simeq {}_{\ell^\infty}\mathrm{Pic}(X) \quad ,$$

$$(9.12) \qquad \mathrm{Gr}^o H^1(X,\underline{Z}_\ell[1]) = H^1(X,\underline{Z}_\ell[1]) \simeq T_\ell(\mathrm{Pic}(X)) \quad ,$$

qui permet d'expliciter ces invariants, modulo groupe fini provenant de la torsion de NS(X) , en termes de la variété de Picard $\underline{\mathrm{Pic}}^o_{X/k}$ (dont on peut d'ailleurs négliger les éléments nilpotents ...), où si on préfère, en termes de la variété d'Albanese Alb(X) (dont le caractère d'invariant birationnel est bien connu grâce à WEIL [25]).

Désignant par x_i les points maximaux de codimension 1 de X-U , la suite exacte de cohomologie relative pour X,U donne en basses dimensions :

$$(9.13)\quad 0 \rightarrow H^1(X,F) \rightarrow H^1(U,F) \rightarrow \sum_i H^0(x_i,(F \otimes \underline{Z}_\ell[-1])_x) \rightarrow H^2(X,F) \rightarrow H^2(U,F) \quad ,$$

en supposant pour simplifier que F est un faisceau de ℓ -torsion ou un faisceau ℓ -adique. Le terme médian doit s'interpréter comme le groupe des <u>diviseurs sur X</u> , <u>à coefficients tordus</u> $F \otimes \underline{Z}_\ell [-1]$, à support contenus dans X-U , et la flêche dans $H^2(X,U)$ n'est autre que l'homomorphisme habituel associant à tout diviseur la 2-classe de cohomologie bien connue. Passant à la limite sur U , on trouve donc

$$(9.14)\qquad Gr^o H^2(X,F) = H^2(X,F)/\ \mathrm{Im}\ \mathrm{Div}(X,F \otimes \underline{Z}_\ell [-1]) \quad ,$$

où $\mathrm{Div}(X,F \otimes \underline{Z}_\ell [-1])$ désigne le groupe de tous les diviseurs sur X à coefficients tordus par $F \otimes \underline{Z}_\ell [-1]$. En particulier, faisant $F = \mu_{\ell^\infty}$ donc $F \otimes \underline{Z}_\ell [-1] = \underline{Q}_\ell/\underline{Z}_\ell$, donc

$$\mathrm{Div}(X,F \otimes \underline{Z}_\ell [-1]) \simeq \mathrm{Div}(X) \otimes \underline{Q}_\ell/\underline{Z}_\ell \quad ,$$

on trouve, compte tenu de (BR II 3.1), un isomorphisme canonique

$$(9.15)\qquad Gr^o H^2(X, \mu_{\ell^\infty}) \simeq Br'(X) \quad .$$

Donc, comme promis, les invariants introduits ici généralisent bien le groupe de Brauer cohomologique Br'(X) (isomorphe, rappelons-le, à Br(X) si $\dim X \leqslant 2$). Il est souvent plus intéressant de travailler avec des faisceaux ℓ -adiques qu'avec des faisceaux ind-finis, il y a lieu alors de remplacer (9.15) par la formule suivante, obtenue en faisant $F = \underline{Z}_\ell [1]$:

(9.16) $$\mathrm{Gr}^o H^2(X,\underline{Z}_\ell [1]) \simeq H^2(X,\underline{Z}_\ell [1])/ \mathrm{Im}\ \mathrm{Pic}(X)\otimes \underline{Z}_\ell \quad ;$$

en d'autres termes on trouve ici "la partie transcendante" de la cohomologie ℓ-adique en dimension 2, obtenue en négligeant la "partie algébrique" i.e. celle provenant de diviseurs à coefficients dans $\underline{Z}_\ell$; son rang (lorsque k est algébriquement clos) est le sempiternel $B_2 - \rho$ (BR II 3.5).

9.7. Gardons les notations de (9.6), et supposons que k soit de caractéristique nulle, pour pouvoir disposer de la résolution des singularités [21] . Si U est un ouvert non vide de X , on peut alors caractériser le noyau de

$$H^i(X,F) \longrightarrow H^i(U,F)$$

comme étant la somme des images des homomorphismes de Gysin [SGA 4 XVIII]

(9.17) $$H^{i-2p}(Z, F_Z \otimes \underline{Z}_\ell [-p]) \longrightarrow H^i(X,F) \quad ,$$

où Z est un schéma propre et lisse sur k , de dimension dim X - p, $p \geqslant 1$ muni d'un morphisme $Z \longrightarrow X$ dont l'image est contenue dans X-U , morphisme qu'on peut si on veut supposer une immersion sur un ouvert non vide de Z . (NB F_Z désigne l'image inverse de F dans Z). La démonstration de cette caractérisation n'offre pas de difficulté, en procédant par récurrence sur la dimension de Y = X-U , utilisant la suite exacte de cohomologie relative pour X , U et la résolution des singularités pour Y . Lorsque U n'est plus fixé, on en conclut la caractérisation correspondante du sous-groupe $\mathrm{Filt}^1 H^i(X,F)$ tel qu'on ait

$$H^i(X,F)/\mathrm{Filt}^1 H^i(X,F) = \mathrm{Gr}^o H^i(X,F) \quad :$$

c'est la réunion des images des homomorphismes de Gysin (9.17), pour Z lisse et propre sur k de dimension $\dim X - p < \dim X$, qu'on envoie dans X par un morphisme quelconque (qu'on peut, si on veut, supposer être génériquement immersif). On notera qu'on doit permettre pour p toutes les valeurs de 1 à $\dim X$. De cette description, on déduit formellement la description suivante de $\mathrm{Filt}^1 H^i(X,F)$, en supposant pour simplifier F constant : c'est la somme des images d'espaces du type $H^{i-2p}(Z, F \otimes \underline{Z}_\ell [-p])$, où Z est propre et lisse sur k , de dimension quelconque, $p \geqslant 1$, par des homomorphismes définissables par des cycles algébriques sur $Z \times X$, de codimension $q = \dim Z + p$. Ainsi, $\mathrm{Filt}^1 H^i(X,F)$ <u>s'interprète comme la partie de</u> $H^i(X,F)$ <u>provenant, à l'aide d'homomorphismes définis par des classes de correspondance algébriques, d'espaces de cohomologie</u> $H^j(Z,G)$ <u>avec</u> $j < i$ (*). Nous dirons encore que les éléments, ou sous-groupes, de $H^i(X,F)$ qui se trouvent dans Filt^1 sont de "type dimensionnel" ou de "niveau" $< i$, tandis que $H^i(X,F)/\mathrm{Filt}^1 = \mathrm{Gr}^o H^i(X,F)$ apparaît comme la "composante pure de niveau i" de $H^i(X,F)$.

9.8. Notons que le critère précédent nous montre le caractère fonctoriel en X de $\mathrm{Filt}^1 H^i(X,F)$, donc de $\mathrm{Gr}^o H^i(X,F)$, pour des morphismes pas nécessairement dominants, et même pour des classes de correspondance algébriques arbitraires. Comme nous avons signalé déjà que lorsque $i > \dim X$, on a $\mathrm{Filt}^1 H^i = H^i$ (formule (9.8)) , on

(*) et Z de dimension <u>quelconque</u>.

en conclut que si Z est tel que $\dim Z < i$, alors pour tout homomorphisme

$$H^j(Z,G) \longrightarrow H^i(X,F)$$

défini par une classe de correspondance algébrique, $\mathrm{Filt}^1\, H^i(X,F)$ contient l'image de cet homomorphisme. J'ignore si $\mathrm{Filt}^1\, H^i(X,F)$ est engendrée par ces images (ce qui fournirait une autre interprétation de Filt^1 , et une justification plus intuitive de la terminologie "type dimensionnel" introduite ci-dessus). Lorsque k est algébriquement clos et que F est le faisceau constant $\underline{Z}_\ell$, il en est très probablement ainsi tout au moins modulo groupes finis, i.e. pourvu qu'on travaille plutôt avec la cohomologie à coefficients dans $\underline{Q}_\ell$. Cela résulterait d'une variante plausible des théorèmes cohomologiques de Lefschetz pour les sections hyperplanes [26] en termes de groupes de cycles algébriques (*), qui de son côté semble maintenant à la base des conjectures de Weil [36] .

(9.9). Les développements du présent paragraphe reposent essentiellement sur l'énoncé démontré dans (9.2) (formule (9.2.)), qui garde un sens indépendamment de tout corps de base, l'hypothèse de lissité étant simplement remplacée par une hypothèse de régularité. Il est plausible que l'énoncé ainsi généralisé reste valable dans ces conditions plus générales, du moins si X est excellent. La démonstration donnée montre que la question est liée au théorème de pureté cohomologique. Grâce à ARTIN, celui-ci est démontré pour des schémas excellents de caractéristique nulle (SGA 4 XIX), de sorte que les développements précédents s'étendent de façon évidente pour définir des inva-

(*) Cf. l'exposé de KLEIMAN dans ce même volume.

riants birationnels <u>relatifs</u> au-dessus d'un tel schéma de base.

10. Relations avec les conjectures de Weil et de Tate.

10.1. <u>Filtration de la cohomologie par le "type dimensionnel"</u>. Soit X un préschéma sur un corps k , F un faisceau étale sur X . On définit alors une filtration décroissante naturelle des groupes de cohomologie $H^i(X,F)$, en posant

$$\mathrm{Filt}^p H^i(X,F) = \bigcup_U \mathrm{Ker}\,(H^i(X,F) \longrightarrow H^i(U,F)) \quad , \tag{10.1}$$

où la réunion du deuxième membre est étendue aux ouverts U de X tels que

$$\mathrm{codim}(X-U,X) \geqslant p \quad . \tag{10.1 bis}$$

Cette filtration de la cohomologie est donc associée à la "filtration" de X par les familles ϕ^p de parties fermées, où ϕ^p désigne l'ensemble des fermés de X qui sont de codimension $\geqslant p$. Des réflexions standard (cf par exemple [20]) montrent alors que la filtration (10.1) de $H^\bullet(X,F)$ fait de ce groupe l'aboutissement d'une suite spectrale convergente (dont le terme E_∞ est par suite le gradué associé

$$E_\infty = \mathrm{Gr}\, H^\bullet(X,F) \quad), \tag{10.2}$$

dont le terme initial s'explicite ici comme

$$E_1^{p,q} = \sum_{x \in X^{(p)}} H_x^{p+q}(F) \quad , \tag{10.3}$$

où $X^{(p)}$ désigne l'ensemble des points x de X qui sont de codimension p ,

$$x \in X^{(p)} \Longleftrightarrow \dim \underline{O}_{X,x} = p \quad ,$$

et où, pour un point x de X , et un entier n , on définit

$$(10.4) \qquad H^n_x(F) = \varinjlim_{U} H^n_{\overline{\{x\}} \cap U}(U,F) \quad ,$$

la limite inductive étant prise suivant les voisinages ouverts (au sens de Zariski) de x , le groupe de cohomologie écrit au deuxième membre étant la cohomologie "à support dans $\overline{\{x\}} \cap U$ ". Lorsque X est lisse, F localement constant (pour la topologie étale) et de ℓ -torsion, ℓ premier à car.K , alors le "théorème de pureté cohomologique" (SGA 4 XVI) permet d'expliciter le deuxième membre de (10.4) par la formule

$$(10.5) \qquad H^n_x(F) \simeq H^{n-2p}(x,F \otimes \underline{Z}_\ell\,[-p]\,) = \varinjlim_{V} H^{n-2p}(V,F \otimes \underline{Z}_\ell\,[-p]\,) \ ,$$

où $p = \dim \underline{O}_{X,x}$ est la codimension de x dans X , et où V parcourt les ouverts non vides de $\overline{\{x\}}$. Ainsi (10.3) nous donne dans ce cas :

$$(10.6) \qquad H^{\cdot}(X,F) \Longleftarrow E_1^{p,q} = \sum_{x \in X^{(p)}} H^{q-p}(x,F \otimes \underline{Z}_\ell\,[-p]\,) \quad ;$$

comparer [20] et [19 , footnote 8] pour la suite spectrale analogue pour la cohomologie des faisceaux cohérents resp. la cohomologie de De Rham.

Ces considérations s'étendent de façon évidente aux faisceaux ℓ -adiques constructibles, en particulier si F est constant tordu sur X lisse, on a la suite spectrale (10.6), dont le terme initial s'explicite par (10.5), associé à la filtration de $H^\bullet(X,F)$ définie par (10.1). Dans ce cas, et sous réserve de disposer de la résolution des singularités, par exemple si $\mathrm{car}.k = 0$, les réflexions de (9.7) s'appliquent pour donner la caractérisation suivante de $\mathrm{Filt}^p\, H^\bullet(X,F)$:

$$(10.7) \qquad \mathrm{Filt}^p H^i(X,F) = \sum_{q \geqslant p} \mathrm{Im}\,(H^{i-2q}(Z,F_Z \otimes \underline{Z}_\ell\,[-q]) \to H^i(X,F)) ,$$

où Z est un X-schéma propre de dimension égale à $\dim X - q$ (en supposant pour simplifier X équidimensionnel). Les variantes de cette description, signalées dans (9.7) et (9.8), pour $p = 1$, restent encore valables pour p quelconque.

10.2. Désignons par $\bar{k}$ une clôture algébrique de k , et soient $\bar{X}$, $\bar{F}$ déduits de X , F par extension $k \to \bar{k}$ du corps de base. Alors les réflexions de (10.1) peuvent s'appliquer, pour donner une filtration canonique sur $H^\bullet(\bar{X},\bar{F})$, aboutissement d'une suite spectrale à terme initial explicité. Or le groupe fondamental

$$G = {}^\bullet\pi_1(k) = \mathrm{Gal}(\bar{k}/k)$$

opère sur toute la situation par transport de structure, et en particulier il opère sur $H^\bullet(\bar{X},\bar{F})$ en invariant sa filtration. Il opère donc par suite sur le gradué associé $\mathrm{Gr}\, H^\bullet(\bar{X},\bar{F})$.

Lorsque k est le corps fini à N éléments, alors G s'identifie à $\underline{\hat{Z}}$ grâce au générateur topologique frob_N , et la connaissance de l'opération de G est équivalente à l'opération de l'automorphisme de frobénius. Supposons alors que X est lisse et propre sur $k = \underline{F}_N$, et que $F = \underline{Z}_\ell$ (considéré comme faisceau ℓ-adique).

Supposons de plus qu'on dispose de la résolution des singularités, de façon à pouvoir écrire (10.7) pour $\bar{X}$, i.e.

$$(10.8) \qquad \mathrm{Filt}^p H^i(\bar{X},\underline{Z}_\ell) = \sum_{q \geqslant p} \mathrm{Im}(H^{i-2q}(\bar{Z},\underline{Z}_\ell[-q]) \longrightarrow H^i(\bar{X},\underline{Z}_\ell)) ,$$

où on peut prendre les $\bar{Z}$ provenant de X -préschémas lisses et propres Z . Remarquons qu'on a :

$$(10.9) \qquad H^j(\bar{Z},\underline{Z}_\ell[-q]) \simeq H^j(\bar{Z},\underline{Z}_\ell)[-q] = H^j(\bar{Z},\underline{Z}_\ell)\otimes_{\underline{Z}_\ell} \underline{Z}_\ell[-q] .$$

D'autre part, la conjecture de WEIL-RIEMANN [36] [17] postule que frob_N opérant sur $H^j(\bar{Z},\underline{Z}_\ell)$ a un polynôme caractéristique à coefficients <u>entiers</u> ordinaires, donc que ces racines (les valeurs propres de frob_N opérant sur $H^j(\bar{Z},\underline{Z}_\ell)$) sont des entiers algébriques, et que de plus ces derniers sont de valeurs absolues égales à $N^{j/2}$. Comme les valeurs propres de frob_N opérant sur (10.9) sont égales aux valeurs propres précédentes multipliées par N^q , on conclut alors de l'expression (10.8) que <u>les valeurs propres de</u> frob_N <u>opérant sur</u> $\mathrm{Filt}^p H^i(\bar{X},\underline{Z}_\ell)$ <u>sont stables par conjugaison sur</u> $\underline{Q}$ (i.e. <u>le polynôme caractéristique de cet endomorphisme est encore à coefficients entiers</u>), <u>et que ce sont des produits de</u> N^p <u>par des entiers algébriques</u> (<u>de valeur absolue nécessairement égale à</u> $N^{i/2-p}$) . Il y a donc lieu de conjecturer que cet énoncé, généralisant l'hypothèse de WEIL-RIEMANN, est valable pour tout schéma propre et lisse sur le corps fini $\underline{F}_N$. Désignant par $\mathrm{Filt}'^p H^i(\bar{X},\underline{Q}_\ell)$ le sous-espace de

$$H^i(\bar{X},\underline{Q}_\ell) = H^i(\bar{X},\underline{Z}_\ell)\otimes_{\underline{Z}_\ell}\underline{Q}_\ell$$

stable par frob_N correspondant aux valeurs propres de frob_N dont les quotients par N^p sont encore des entiers algébriques, on peut exprimer la conjecture précédente par la relation

$$(10.10)\qquad \mathrm{Filt}^{p}H^{i}(\bar{X},\underline{Q}_{\ell}) \subset \mathrm{Filt}'^{p}H^{i}(\bar{X},\underline{Q}_{\ell}) \ .$$

10.3. Nous inspirant des conjectures de TATE [33] , _il y a lieu de conjecturer que l'inclusion hypothétique_ (10.10) _suggérée par les conjectures de_ WEIL, _est en fait une égalité_. Lorsque $i = 2p$, ceci se réduit en effet aux conjectures de TATE, dans le cas du corps de base $\underline{F}_N$, car on constate aussitôt que $\mathrm{Filt}^{p}H^{2p}(\bar{X},\underline{Z}_{\ell})$ est exactement le sous-module de $H^{2p}(\bar{X},\underline{Z}_{\ell})$ engendré par les classes de cohomologie des cycles de codimension p dans $\bar{X}$ (à coefficients dans $\underline{Z}_{\ell}[-p]$) ; tensorisant par $\underline{Q}_{\ell}[p]$, on trouve (compte tenu des conj. de WEIL) la _conjecture_ de TATE : _le sous-espace de_ $H^{2p}(\bar{X},\underline{Q}_{\ell}[p])$ _engendré par les classes de cohomologie des cycles algébriques de codimension_ p _est égal à l'espace correspondant aux valeurs propres de_ frob_q _qui sont des racines de l'unité_, i.e. _à l'espace des invariants de_ $\mathrm{frob}_q^{\,r}$ _pour_ r _grand_.

Il est immédiat comment généraliser la définition de Filt' lorsque le corps fini $\underline{F}_N$ est remplacé par un "corps de type fini", ou mieux, par un schéma de base S régulier et de type fini sur Spec $\underline{Z}$, en faisant intervenir les opérations des frobénius correspondants aux différents points fermés de S . Il y a lieu alors de conjecturer l'égalité dans (10.10) dans cette situation générale, ce qui généralise la conjecture de TATE pour la base S .

Rappelons cependant [32] que même lorsque X est une surface lisse et propre sur le corps fini F_N , ni la conjecture de WEIL ni celle de TATE n'est prouvée pour le $H^2(\bar{X},\underline{Z}_{\ell})$, celle de TATE étant d'ailleurs équivalente (en vertu de ARTIN-TATE) à l'hypothèse de finitude du groupe de Brauer "arithmétique" $Br(X)$ [32].

10.4. Comme nous l'avons déjà signalé, lorsque X est lisse sur le corps k, on peut introduire sur la cohomologie de De Rham $H^{\cdot}(X)$ de X une filtration par la même formule (10.1), associée encore à une suite spectrale analogue à (10.6) [19]. On ne confondra pas cette filtration par les $\mathrm{Filt}^p H^i(X)$ avec la filtration par des $\mathrm{Filt}'^p H^i(X,F)$, défini par voie purement algébrique en termes de la définition de $H^{\cdot}(X)$ comme l'hypercohomologie de X à valeurs dans le complexe de faisceaux de De Rham, filtration qui est associée à une suite spectrale de terme initial

$$(10.11) \qquad H^{\cdot}(X) \Longleftarrow E'^{p,q}_1 = H^q(X, \underline{\Omega}^p_{X/k}) \quad ,$$

(l'opérateur différentiel de E'_1 provenant de celui de $\underline{\Omega}_{X/k}$). Cette deuxième filtration joue un rôle analogue à la filtration "arithmétique" désignée par la même notation dans (10.2), et la formule (10.10) se remplace ici par la formule

$$(10.12) \qquad \mathrm{Filt}^p H^i(X) \subset \mathrm{Filt}'^p H^i(X) \quad ,$$

valable tout au moins si k est de caractéristique nulle. Lorsque de plus X est projectif sur k, la théorie de HODGE [37] prouve d'ailleurs que la suite spectrale (10.11) est dégénérée, et si $k = \underline{C}$, on trouve un isomorphisme canonique de la cohomologie de De Rham avec la cohomologie de Hodge.

$$(10.13) \qquad H^{\cdot}(X) \simeq \sum_{p,q} H^q(X, \underline{\Omega}^p_{X/\underline{C}}) \quad ,$$

(par une définition transcendante, via l'opération transcendante de "conjugaison complexe" $\phi \longmapsto \bar{\phi}$ dans $H^{\cdot}(X)$ et la filtration Filt' de $H^{\cdot}(X)$, donnant naissance à la bigraduation de HODGE). Dans ce cas, la filtration "topologique" Filt^p étant manifestement stable par conjugaison complexe, la relation (10.12) peut aussi s'écrire

$$(10.14) \qquad \mathrm{Filt}^p H^i(X) \subset \mathrm{Filt}'^p H^i(X) \cap \overline{\mathrm{Filt}'^p}\, H^i(X) \quad ,$$

où le terme de droite s'explicite également en termes de la bigraduation (10.13) comme la somme des termes bihomogènes $H^{r,s}(X)$, avec $r \leqslant p$, $s \leqslant p$. Désignant par X_{cl} l'espace $X(\underline{C})$ muni de sa topologie compacte habituelle, $H^i(X)$ n'est autre que $H^i(X_{cl},\underline{Q}) \otimes \underline{C}$, et l'inclusion (10.14) s'écrit de façon équivalente comme une inclusion

$$(10.15) \qquad \mathrm{Filt}^p\, H^i(X_{cl},\underline{Q}) \subset \mathrm{Filt}'^p H^i(X) \cap \overline{\mathrm{Filt}'^p H^i(X)} \cap H^i(X_{cl},\underline{Q})$$

(compte tenu que la filtration "topologique" de $H^i(X)$ est évidemment déduite d'une filtration sur $H^i(X_{cl},\underline{Q})$).

La conjecture de TATE généralisée du (10.3) admet comme analogue la classique conjecture de HODGE [22] : l'inclusion (10.15) est une égalité.* Le cas $i = 2p$, qui correspond exactement à la conjecture de TATE proprement dite, n'est autre que la caractérisation conjecturale des classes de cohomologie rationnelles de $H^{2p}(X_{cl},\underline{Q})$ qui correspondent à des cycles algébriques de codimension p, à coefficients rationnels, comme celles qui sont de type (p,p).

* (Ajouté en octobre 1968.) On a oublié dans cet énoncé de préciser qu'on suppose $i \leqslant m$, où X est équidimensionnel de dimension m; la théorie de Lefschetz [26] permet d'ailleurs, pour une description de Filt en termes de Filt', de se ramener aux $i \leqslant m$: si $i \geqslant m$, remplacer p par $p + (i-m)$ dans le deuxième membre de (10.15). D'autre part, l'auteur vient de s'apercevoir que la conjecture de Hodge est fausse, pour des raisons essentiellement triviales, sous sa forme originale qu'on vient de rappeler, et doit être reformulée ainsi: le premier membre de (10.15) est le plus grand sous-espace vectoriel (sur Q) du second membre, engendrant dans $H^i(X,\underline{C})$ un sous-espace vectoriel stable par la décomposition de Hodge.

11. Appendice: Un théorème de comparaison de la cohomologie étale et de la cohomologie fppf.

Nous allons dans le présent appendice démontrer le théorème "rappelé" au début du paragraphe 5, sous une forme un peu plus générale (11.7). Les notations sont celles introduites au par. 5, nous aurons en particulier à considérer le morphisme canonique de sites

$$p : X_{pl} \longrightarrow X_{ét}$$

associé à un préschéma X . Nous désignons par G_{pl} un faisceau abélien sur X_{pl} , et par n un entier $\geqslant 0$.

<u>Lemme</u> (11.1). <u>Les conditions suivantes sont équivalentes</u> :

(i) $R^i p_*(G_{pl}) = 0$ <u>pour</u> $1 \leqslant i \leqslant n$.

(ii) <u>Pour tout</u> X' <u>étale sur</u> X , <u>l'homomorphisme canonique</u>

$$H^i(X'_{ét}, p_*(G_{pl})) \longrightarrow H^i(X'_{pl}, G_{pl})$$

<u>est un isomorphisme pour</u> $i \leqslant n$, <u>un monomorphisme pour</u> $i = n+1$.

(iii) <u>Pour tout localisé strict</u> $\bar{X}$ <u>de</u> X , <u>on a</u>

$$H^i(\bar{X}, G_{pl}) = 0 \quad \underline{\text{pour}} \quad 1 \leqslant i \leqslant n .$$

<u>Démonstration</u>. L'équivalence de (i) et (ii) est essentiellement triviale, et s'étend à un morphisme de sites quelconques. L'équivalence de (i) et (iii) résulte aussitôt des isomorphismes

$$H^i p_*(G_{pl})_{\bar{x}} \simeq H^i(\bar{X}_{pl}, G_{pl}) \quad ,$$

où $\bar{X}$ est le localisé strict de X relatif au point géométrique $\bar{x}$ de X [SGA 4 VIII 4] , limite projective de schémas affines X'_i étales sur X . En vertu de [SGA 4 VIII 3.9] le premier membre est en effet isomorphe à

$$\varinjlim_i H^i(X'_{i\ pl}, G_{pl}) \quad ,$$

lui-même isomorphe au deuxième membre en vertu de la théorie de passage à la limite [SGA 4 VI par. 6, VII 5] , qui s'applique en effet au cas de la topologie fppf, comme à celui de la topologie étale.

<u>Lemme</u> (11.2). ("Lemme de Cartan"). <u>Supposons</u> X <u>local hensélien. Les conditions suivantes sont équivalentes</u> :

(i) <u>Pour tout</u> X' <u>fini localement libre sur</u> X , <u>on a</u>

$$H^i(X'_{pl}, G_{pl}) = 0 \qquad \underline{\text{pour}} \quad 1 \leqslant i \leqslant n \quad .$$

(ii) <u>Pour tout</u> X' <u>comme dessus</u>, <u>et tout</u> X'' <u>fini localement libre sur</u> X' , <u>on a</u>

$$H^i(X''/X', G_{pl}) = 0 \quad \text{pour} \quad 1 \leqslant i \leqslant n \quad ,$$

(<u>où le premier membre désigne la cohomologie de Čech pour le</u> "<u>recouvrement</u>" $X'' \longrightarrow X'$).

NB. On dit qu'un morphisme $X' \longrightarrow X$ est <u>localement libre</u> si X' est le spectre d'un faisceau d'Algèbres qui est localement libre comme faisceau de modules. Démontrons (11.2) : notons qu'on peut dans l'énoncé supposer que $X' \longrightarrow X$ et $X'' \longrightarrow X'$ sont surjectifs (car l'image est à la fois ouverte et fermée), donc qu'ils sont "couvrants" pour la topologie fppf. Pour un X' fixé, comme X' est semi-local hensélien, il est connu que les X'' sont cofinaux dans les familles couvrantes de X' pour la topologie fppf, donc que pour tout $i \geqslant 1$ et tout $\xi \in H^i(X'_{pl},G_{pl})$, peut s'effacer par un tel X'' . Le lemme (11.2) résulte de là formellement par un argument connu, procédant par récurrence sur n et utilisant la suite spectrale de Leray pour le "recouvrement" X''/X' .

Nous sommes donc amenés à trouver des critères de nullité pour les groupes de cohomologie $H^i(X'/X,G_{pl})$. Signalons d'abord le lemme préliminaire :

Lemme (11.3). Soit $X'_o \to X_o$ un morphisme de X-préschémas. Pour tout entier $j \geqslant 0$, désignons par X'^j (resp. X'^j_o) le produit fibré j.ème de X' (resp. de $X'_o = X' \times_X X_o$) sur X (resp. sur X_o). Supposons vérifiée la condition suivante :

(L) Pour tout $j \geqslant 1$, l'application

$$G_{pl}(X'^j) \longrightarrow G_{pl}(X'^j_o)$$

est surjective.

Alors les conditions suivantes sont équivalentes :

(i) L'application

$$H^i(X'/X,G_{pl}) \longrightarrow H^i(X'_o/X_o,G_{pl})$$

est bijective pour $1 \leqslant i \leqslant n$, injective pour $i = n+1$.

(ii) Si N désigne le foncteur $Z \longmapsto \mathrm{Ker}\,(G_{pl}(Z) \to G_{pl}(Z_o))$, où $Z_o = Z\times_X X_o$, on a

$$H^i(X'/X,N) = 0 \quad \text{pour} \quad 1 \leqslant i \leqslant n \quad .$$

Démonstration. On a une suite exacte de complexes de cochaines

$$0 \longrightarrow C^\cdot(X'/X,N) \longrightarrow C^\cdot(X'/X,G) \longrightarrow C^\cdot(X'_o/X_o,G) \longrightarrow 0 \quad ,$$

compte tenu de la condition (L) . On en conclut une suite exacte de cohomologie

$$\cdots \to H^i(X'/X,N) \longrightarrow H^i(X'/X,G) \longrightarrow H^i(X'_o/X_o,G) \longrightarrow H^{i+1}(X'/X,N) \to \cdots ,$$

qui implique aussitôt la conclusion voulue.

Voici enfin le lemme clef :

Lemme (11.4). Avec les notations de (11.3), supposons de plus X local hensélien, $X_o \longrightarrow X$ une immersion fermée, $X' \longrightarrow X$ fini localement libre, que G_{pl} satisfasse la condition (L), et qu'il existe un sous-foncteur ouvert U de G_{pl} "contenant" la section unité et qui soit représentable par un préschéma lisse sur X (ces deux conditions sur G_{pl} sont automatiquement vérifiées si G_{pl} est représentable par un préschéma lisse sur X). Alors la condition (i) de (11.3) est vérifiée pour tout n .

Lorsque X_o n'est pas de présentation finie sur X , pour pouvoir dans (11.3) et (11.4) donner un sens à $G_{pl}(X_o)$, et plus généralement $G_{pl}(X'^{j}_o)$, il y a lieu de prolonger canoniquement G_{pl} en un foncteur $(Sch)^o_{/X} \longrightarrow (Ens)$, en posant pour tout $f : Y \to X$ sur X : $G_{pl}(Y) = f^*_{pl}(G_{pl})(Y)$. Alors U est encore un sous-foncteur ouvert de $G_{pl} = G$, considéré comme foncteur défini sur tout $(Sch)_{/X}$. Nous utiliserons aussi les foncteurs $\underline{C}^i(G)$ définis par

$$\underline{C}^i(G)(Y) = C^i(Y'/Y,G) = G\ (Y'^{i+1}) \quad ,$$

où $Y' = Y\times_X X'$, Y'^{i+1} désignant la puissance fibrée (i+1).ème de Y' sur Y . Ainsi, $\underline{C}^i(G)$ n'est autre que le foncteur noté $\underline{\mathrm{Hom}}_X(X'^{i+1},G)$ par ailleurs. Les $\underline{C}^i(G)$ forment un "foncteur-groupe simplicial" noté $\underline{C}^\bullet(G)$, et on a des isomorphismes canoniques

$$\underline{C}^\bullet(G)(X) = C^\bullet(X'/X,G) \quad , \quad \underline{C}^\bullet(G)(X_o) = C^\bullet(X'_o/X_o,G) \quad .$$

On introduit de même le sous-foncteur $\underline{Z}^i(G)$ de $\underline{C}^i(G)$, noyau de l'homomorphisme cobord $\underline{C}^i(G) \longrightarrow \underline{C}^{i+1}(G)$, de sorte qu'on a des isomorphismes canoniques

$$\underline{Z}^i(G)(X) = Z^i(X'/X,G) \quad , \quad \underline{Z}^i(G)(X_o) = Z^i(X'_o/X_o,G) \quad .$$

On peut, pour tout i , considérer le sous-foncteur

$$\underline{C}^i(U) = \underline{\mathrm{Hom}}_X(X'^{i+1},U)$$

de $\underline{C}^i(G)$. Ces sous-foncteurs, pour i variable, forment un sous-foncteur simplicial $\underline{C}^\bullet(U)$ de $\underline{C}^\bullet(G)$ (mais en général pas stable, bien entendu, par la loi de groupe). Notons que chaque $\underline{C}^i(U)$ est un sous-foncteur <u>ouvert</u> de $\underline{C}^i(G)$. On peut d'autre part supposer U affine, ce qui implique alors que les $\underline{C}^i(U)$ sont <u>représentables</u> par des schémas affines sur X , qui sont de plus <u>lisses</u> en vertu de l'hypothèse de lissité sur U (comme on voit par le critère infinitésimal habituel de lissité).

On posera $\underline{Z}^i(U) = \underline{Z}^i(G) \cap \underline{C}^i(U)$, c'est un sous-foncteur de

$\underline{C}^i(U)$, dont on ne sait pas s'il est représentable, faute de pouvoir affirmer que le cobord d^i applique $\underline{C}^i(U)$ dans $\underline{C}^{i+1}(U)$. Cependant, posant

$$\underline{C}'^i(U) = d_i^{-1}(\underline{C}^{i+1}(U)) \quad ,$$

on trouve un sous-schéma ouvert de $\underline{C}^i(U)$, contenant la section nulle, et posant

$$\underline{Z}'^i(U) = \underline{Z}^i(G) \cap \underline{C}'^i(U) = \mathrm{Ker}\ (C'^i(U) \longrightarrow \underline{C}'^{i+1}(U)) \quad ,$$

on trouve un foncteur représentable par un sous-préschéma de présentation finie de $C'^i(U)$, comme image inverse de la section nulle de $C'^{i+1}(U)$ par le morphisme de préschémas $\underline{C}'^i(U) \longrightarrow C'^{i+1}(U)$.

Le fait important, qui donne la clef de la démonstration, est que

(*) $$d^{i-1} : \underline{C}'^{i-1}(U) \longrightarrow \underline{Z}'^i(U) \quad , \text{ pour } i \geqslant 1 \quad ,$$

<u>est un morphisme lisse de préschémas</u>. (Ce fait est vrai, indépendamment de l'hypothèse locale hensélienne sur X , et est également indépendant de la donnée de X_o et de l'hypothèse (L)). Quitte à faire un changement de base affine $Y \longrightarrow X$, on est ramené à montrer que si X est affine, et si X_o est un sous-schéma fermé défini par un idéal $\underline{I}$ de carré nul, alors pour tout $z^i \in \underline{Z}'^i(U)(X)$, et tout $c_o^{i-1} \in \underline{C}^{i-1}(U)(X_o)$, tels que

$$d^{i-1}(c_o^{i-1}) = z_o^i$$

(où le deuxième membre désigne la restriction de z^i à X_o), il existe un $c^{i-1} \in \underline{C}'^{i-1}(U)(X)$, relevant c_o^{i-1} , et satisfaisant

$$d^{i-1}(c^{i-1}) = z^i \quad .$$

Pour le trouver, on note que, puisque $\underline{C}'^{i-1}(U)$ est lisse sur X, on peut remonter c_o^{i-1} en une cochaine $c^{i-1} \in \underline{C}'^{i-1}(U)(X)$, et alors

$$u^i = d^{i-1}(c^{i-1}) - z^i$$

est un élément de $\underline{Z}'^i(U)(X)$ dont la restriction u_o^i à X_o est nulle. Tout revient à prouver qu'il existe un $v^i \in \underline{C}'^{i-1}(U)(X)$, tel que

$$v_o^i = 0 \quad , \quad d^{i-1}v^i = u^i \quad .$$

En d'autres termes, avec les notations de (11.3), on est ramené à prouver qu'on a

$$H^i(X'/X,N) = 0 \quad \text{pour} \quad i \geqslant 1 \quad .$$

Or, utilisant la représentabilité de U, on constate aussitôt que l'on a un isomorphisme canonique de foncteurs :

$$N(Y) = H^o(Y, f^*(\underline{\omega})) \quad ,$$

où $f : Y \dashrightarrow X$ est le morphisme structural et $\underline{\omega}$ est l'image inverse, par la section unité, du faisceau $\underline{\Omega}^1_{U/X}$ des 1-différentielles relatives. Par suite on trouve $H^i(X'/X,N) = H^i(X'/X, \underline{\omega})$, qui est nul pour $i \geqslant 1$ comme il est bien connu [16, I, page 18].

Utilisant la lissité de l'application (*), on va conclure facilement la validité de la condition (ii) de (11.3) (en revenant maintenant aux conditions initiales de (11.4), donc sans plus supposer

X_o défini par un idéal nilpotent, ce qui prouvera bien (11.4) grâce à (11.3). Soit (pour $i \geqslant 1$ fixé)

$$\underline{z}^i \in Z^i(X'/X,N) \subset \underline{Z}'^i(U)(X) \quad ,$$

donc $z_o^i = 0$, on cherche un $c^{i-1} \in \underline{C}'^{i-1}(U)(X)$, avec $c_o^{i-1} = 0$, tel que $d^{i-1}(c^{i-1}) = z^i$. Or l'image inverse de la section z^i de $\underline{Z}'^i(U)$ sur X par le morphisme lisse (*) est un sous-préschéma Z de $\underline{C}'^{i-1}(U)$ lisse sur X , d'autre part on dispose d'une section de $Z_o = Z \times_X X_o$ sur X_o , savoir la section nulle. Comme X est hensélien, on peut alors relever cette section en une section c^{i-1} de Z , cqfd.

Remarques (11.5).

1°) Lorsque dans (11.4) X_o est défini par un Nilidéal de X , on peut affaiblir les autres hypothèses, en se bornant à supposer X affine (au lieu de local hensélien), et en laissant tomber l'hypothèse que U soit lisse sur X (représentable suffit). Bien entendu, on garde l'hypothèse (L), qui est dans la nature d'une hypothèse de lissité.

2°) Pour démontrer la lissité du morphisme (*) ci-dessus, on n'a manifestement utilisé l'hypothèse affine sur U que pour pouvoir affirmer que les deux membres sont bien représentables, ce qui est le cas sous des conditions nettement plus générales. Par exemple, si G est représentable et lisse sur X , on pourra prendre $G = U$ dans des cas importants, par exemple chaque fois que G est quasi-projectif sur X , ou que X est le spectre d'un corps, ou que $X' \longrightarrow X$

est radiciel.

Lemme (11.6). Sous les conditions de (11.4) sur X, G, supposons la condition (L) vérifiée pour tout X' fini localement libre sur X et $X_o = \mathrm{Spec}(k(x))$, et X strictement local, i. e. à corps résiduel séparablement clos. Alors on a

$$H^i(X'/X, G_{pl}) = 0 \quad \text{pour} \quad i \geqslant 1 \quad ,$$

et de même

$$H^i(X_{pl}, G_{pl}) = 0 \quad \text{pour} \quad i \geqslant 1 \quad .$$

Démonstration. La deuxième assertion résulte de la première, compte tenu que les hypothèses sont stables par passage de X à X', et de (11.2). Pour la première relation, compte tenu de (11.4), on peut supposer que X est égal au spectre d'un corps séparablement clos k. Alors il est connu que G est même représentable par un schéma en groupes lisse sur k [SGA 3 XVIII], et par suite (11.5. 2°) le morphisme

$$\underline{C}^{i-1}(G) \longrightarrow \underline{Z}^i(G) \ , \quad \text{pour} \quad i \geqslant 1 \quad ,$$

est représentable par un morphisme lisse de préschémas. Pour prouver que chaque point de $\underline{Z}^i(G)(k)$ provient d'un point de $\underline{C}^{i-1}(G)(k)$, il suffit donc de prouver que le morphisme précédent est surjectif. Or ceci nous ramène au cas où le corps de base k est algébriquement clos et non seulement séparablement clos, mais alors tout X' fini non vide sur $X = \mathrm{Spec}(k)$ admet une section, et par suite $H^i(X'/X, G) = 0$ pour $i \geqslant 1$, ce qui implique la surjectivité voulue et achève de prouver (11.6).

Mettant ensemble les résultats obtenus (11.1), (11.2), (11.4), (11.6), on trouve :

Théorème (11.7). Soient X un préschéma, G_{pl} un faisceau abélien sur X_{pl} . On suppose vérifiées les deux conditions suivantes (remplies en tous cas si G est représentable par un préschéma lisse sur X) :

(L) Pour tout localisé strict $\bar{X}$ de X , tout sous-schéma fermé non vide X_o de X , et tout X' fini localement libre sur $\bar{X}$, posant $X'_o = X' \times_X X_o$, l'homomorphisme

$$G(X') \longrightarrow G(X'_o)$$

est surjectif.

(R) Pour tout $\bar{X}$ comme ci-dessus, il existe un sous-foncteur ouvert U de $G_{pl} \times_X \bar{X} = \bar{G}_{pl}$, représentable par un préschéma lisse et tel que $U \longrightarrow X$ soit surjectif (auquel cas, quitte à "translater" U , on peut même supposer que U "contient" la section nulle).

Alors on a les conclusions suivantes :

1°) Les homomorphismes canoniques

$$H^i(X_{ét}, G_{ét}) \longrightarrow H^i(X_{pl}, G_{pl})$$

sont des isomorphismes, où $G_{ét} = p_*(G_{pl})$ est la restriction de G_{pl} au site étale. En particulier, on a

$$H^i(X_{pl},G_{pl}) = 0 \quad \underline{\text{pour}} \quad i \geqslant 1 \quad , \underline{\text{si}} \quad X \quad \underline{\text{est strictement local}}.$$

2°) <u>Si</u> X_o <u>est un sous-préschéma fermé non vide de</u> X , X <u>local hensélien, alors les homomorphismes de restriction</u>

$$H^i(X,G) \longrightarrow H^i(X_o,G_o) \quad \underline{\text{pour}} \quad i \geqslant 1$$

<u>sont bijectifs, où les groupes de cohomologie sont pris au sens de la topologie étale ou fppf indifféremment, et où</u> $G_o = G_{pl} \times_X X_o$.

3°) <u>Sous les conditions de</u> 2°), <u>pour tout</u> X' <u>fini localement libre sur</u> X , <u>les homomorphismes de restriction</u>

$$H^i(X'/X,G_{pl}) \longrightarrow H^i(X'_o/X_o,G_{pl}) \quad \underline{\text{pour}} \quad i \geqslant 1$$

<u>sont bijectifs. En particulier,</u>

$$H^i(X'/X,G_{pl}) = 0 \quad \underline{\text{pour}} \quad i \geqslant 1 \quad , \underline{\text{si}} \quad X \quad \underline{\text{strictement local}}.$$

<u>Démonstration</u>. Seul 2°) n'est pas encore démontré. Notons qu'en vertu de 1°), les deux énoncés contenus dans 2°), suivant la topologie adoptée, sont équivalents ; travaillons par exemple sur X_{pl} . En vertu de la suite exacte $0 \longrightarrow N \longrightarrow G_{pl} \longrightarrow G_{pl\,o} \longrightarrow 0$, et compte tenu de la condition (L), on est réduit à prouver qu'on a

$$H^i(X_{pl},N) = 0 \quad \text{pour} \quad i \geqslant 1 \quad .$$

En vertu de (11.2) cela se ramène aux relations

$$H^i(X'/X,N) = 0 \quad \text{pour} \quad i \geqslant 1 \quad ,$$

qui en vertu de (11.3) équivalent à la conclusion de 3°), déjà prouvée, cqfd.

Remarques (11.8).

1) Dans 2°) et 3°), on peut remplacer l'hypothèse que X soit local hensélien par celle que X soit affine et X_o défini par un Idéal nilpotent de X, en reformulant convenablement (L) et (R) cf (11.5, 1°).

2) On fera attention que même en interprétant l'énoncé 2°) au sens de la topologie étale, l'isomorphisme envisagé n'est pas trivial (et ne se réduit pas à l'énoncé analogue pour un faisceau étale $G_{ét}$ sur $X_{ét}$ et sa restriction à $X_{o\ ét}$ [SGA 4 VIII 8.6.]). En effet, la restriction $G_{o\ ét}$ de G_o au site étale $X_{o\ ét}$ de X_o n'est pas en général isomorphe à la restriction du faisceau étale $G_{ét}$ sur $X_{ét}$ à ce même $X_{o\ ét}$.

3) On peut, par essentiellement la même méthode, prouver un énoncé correspondant à (11.7), pour un faisceau en groupes G_{pl} non nécessairement commutatif sur X_{pl}, et les H^1 correspondants, généralisant [SGA 3 XXIV 8.1.] , (où on avait fait des hypothèses de quasi-projectivité, pour assurer la représentabilité des $\underline{C}^i(G)$ de la démonstration de (11.4)).

Une remarque analogue s'applique au résultat (11.9) qui suit.

Corollaire (11.9). *Soit* $G_{ét}$ *un faisceau étale sur* X, *et considérons* $G_{pl} = p^*(G_{ét})$, *son image inverse sur le site* fppf X_{pl} *par le morphisme canonique de sites* $p : X_{pl} \longrightarrow X_{ét}$. *Alors l'homomorphisme canonique*

$$G_{ét} \longrightarrow p_*(G_{pl})$$

<u>est un isomorphisme</u>, <u>et si</u> $G_{ét}$ <u>est un faisceau abélien</u>, <u>les homomorphismes canoniques</u>

$$H^i(X_{ét},G_{ét}) \longrightarrow H^i(X_{pl},G_{pl})$$

<u>sont des isomorphismes</u>.

<u>Démonstration</u>. La première assertion équivaut encore à dire que le foncteur p sur les faisceaux étales est pleinement fidèle, ou encore que l'homomorphisme

$$H^o(X_{ét},G_{ét}) \longrightarrow H^o(X_{pl},G_{pl})$$

est bijectif, et que l'assertion analogue reste vraie en remplaçant X par un X' étale sur X . En fait, on vérifie, de façon plus générale, que pour $X' \in \mathrm{Ob}\, X_{pl}$, à morphisme structural $f : X' \to X$, on a une bijection

$$G_{pl}(X') = p^*(G_{ét})(X') \xrightarrow{\simeq} f^*_{ét}(G_{ét})(X') \quad ,$$

qui est fonctorielle en X' et $G_{ét}$, et permet donc d'interpréter l'opération p^* en termes d'opérations <u>entre sites étales</u>. Cette interprétation de G_{pl} permet de vérifier sans difficulté que G_{pl} satisfait aux conditions de (11.7), car elle rend (L) triviale, tandis que (R) se vérifie en prenant simplement la section nulle de G_{pl} , qui définit un sous-foncteur de G_{pl} grâce à [SGA 4 VIII 6.1] . La conclusion 1°) de (11.7) jointe à la première assertion déjà admise de (11.9) implique alors aussitôt la deuxième assertion de (11.9).

BIBLIOGRAPHIE.

[1] S. ABHYANKAR, Local uniformisation on algebraic surfaces over ground fields of characteristic $p \neq 0$, Ann. of Math. 63 (1956), 491-526 .

[2] S. ABHYANKAR, On the valuations contained in a local domain, Amer. Journ. of Math. 78 (1956), 321-348 .

[3] E. ARTIN-J. TATE, Class field theory, (miméographié), Harvard.

[4] M. ARTIN- A.GROTHENDIECK - J.L. VERDIER, Cohomologie étale des schémas, Séminaire de Géométrie Algébrique de l'I.H.E.S. 1963/64 (cité SGA 4).

[5] M. ARTIN-J. L. VERDIER, Seminar on étale cohomology of number fields, Summer Institute on Algebraic Geometry held at the Whitney Estate, Woods Hole, 1964.

[6] M. F. ATIYAH- W.C.D. HODGE, Integrals of the second kind on an algebraic variety, Annals of Math. 62 (1955), 56-91 .

[7] M. AUSLANDER-O. GOLDMAN, The Brauer group of a commutative ring, Trans. Amer. Math. Soc. 97 (1960), 367-409 .

[8] N. BOURBAKI, Algèbre, Chap. VIII, Modules et Anneaux semi-simples, Act. Scient. et Ind. 1261, Paris, Hermann.

[9] C. CHEVALLEY, Classification des groupes de Lie algébriques, Séminaire de l'Ecole Normale Supérieure 1956/58 .

[10] C. CHEVALLEY, Démonstration d'une hypothèse de M. Artin, Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg, 11 (1934), 73-75 .

[11] M. DEMAZURE-A. GROTHENDIECK, Schémas en Groupes, Séminaire de Géométrie Algébrique de l'I.H.E.S. 1962/64, (cité SGA 3).

[12] J. DIEUDONNE-A. GROTHENDIECK, Eléments de Géométrie Algébrique, Chapitres II, III, IV, Publications Mathématiques de l'I.H.E.S., (cité EGA II, III, IV) .

[13] M. J. GREENBERG, Rational points in henselian discrete valuation rings, à paraître dans Publications Mathématiques.

[14] A. GROTHENDIECK, Cohomologie locale des faisceaux cohérents et théorèmes de Lefschetz locaux et globaux, Séminaire de Géométrie Algébrique de l'I.H.E.S., 1962 (cité SGA 2).

[15] A. GROTHENDIECK, Cohomologie ℓ-adique et fonctions L, Séminaire de Géométrie Algébrique de l'I.H.E.S., 1964/65, (cité SGA 5).

[16] A. GROTHENDIECK, Fondements de la Géométrie Algébrique (Extraits du Séminaire Bourbaki 1957-1962), Secrétariat Mathématique, 11 rue Pierre Curie, Paris.

[17] A. GROTHENDIECK, Formule de Lefschetz et rationalité des fonctions L, Séminaire Bourbaki 279 (décembre 1964) (*).

[18] A. GROTHENDIECK, Le groupe de Brauer, I, II, Séminaire Bourbaki 290 (Mai 1965) et 297 (Novembre 1965) (*).

(*) Dans ce volume.

[19] A. GROTHENDIECK, Crystals and the De Rham cohomology of algebraic varieties, Pub. Math. 29 (1966), 95-103 (*).

[20] R. HARTSHORNE, Residues and duality, Séminaire Harvard 1963/64, (à paraître dans Lecture Notes in Mathematics, Springer).

[21] H. HIRONAKA, Resolution of singularities of an algebraic variety over a field of characteristic zero, Ann. of Math. 79 (1964), 109-326 .

[22] W. V. D. HODGE, The topological invariants of algebraic varieties, Proceedings of the Int. Congress of Mathematicians, 1950, 182-192 .

[23] S. LANG, On quasi-algebraic closure, Annals of Math. 55 (1952), 373-390 .

[24] S. LANG, Algebraic groups over finite fields, Amer. Journ. of Math. 78 (1956), 55-63 .

[25] S. LANG, Abelian Varieties, Interscience Publishers, New York.

[26] S. LEFSCHETZ, L'Analysis Situs et La Géométrie Algébrique, Gauthiers-Villars, Paris.

[27] T. MATSUSAKA, A criteria for algebraic equivalence and the torsion group; Amer. Journ. of Math. 79 (1957), 53-66 .

[28] D. MUMFORD, The topology of normal singularities of an algebraic surface and a criterion for simplicity, Pub. Math. 9 (1961), 5-22 .

(*) Dans ce volume.

[29] A. NERON, Modèles minimaux des variétés abéliennes sur les corps locaux etglobaux, Pub. Math. 21 (1964), 5-128 .

[30] M. RAYNAUD, Caractéristique d'Euler-Poincaré d'un faisceau et cohomologie des variétés abéliennes, Séminaire Bourbaki 287 (Février 1965) (*).

[31] J. P. SERRE, Cohomologie Galoisienne, Lecture Notes in Mathematics 5, Springer.

[32] J. TATE, On the conjectures of Birch and Swinnerton-Dyer and a geometric analog, Séminaire Bourbaki 306 (Février 1966) (*).

[33] J. TATE, Algebraic cohomology classes, Woods Hole Summer Institute on Algebraic Geometry, 1964 .

[34] J. L. VERDIER, Catégories dérivées des catégories abéliennes, à paraître dans North Holland Pub. Cie.

[35] J. L. VERDIER, Catégories dérivées (quelques résultats - Etat 0), Institut des Hautes Etudes Scientifiques, 1963 .

[36] A. WEIL, Number of solutions of equations in finite fields, Bull. Amer. Math. Soc. 55 (1949), 497-508 .

[37] A. WEIL, Variétés Kählériennes, Act. Sc. et Ind. n° 1267, Paris, Hermann .

(*) Dans ce volume.

ERRATA ET COMPLEMENTS.

p. 89, ligne 8:

Comme me l'a signalé J.P. Serre, sans la restriction qu'on vient d'insérer, le théorème du texte est probablement faux, mais néanmoins la relation $Br(K) = 0$ reste vraie sans cette restriction. Il suffit, pour le voir, de reprendre la démonstration classique (non cohomologique) du fait que tout corps gauche fini sur K de centre K est identique à K, utilisant l'extension au corps gauche de la valuation qu'on a sur K. Cet argument marche en effet en supposant seulement V hensélien, au lieu de complet.

p. 93, Corollaire (2.2):

Comme fait remarquer J.P. Serre, la suite exacte écrite dans ce corollaire se décompose en des suites exactes courtes

$$0 \longrightarrow H^i(k,\underline{G}_m) \longrightarrow H^i(K,\underline{G}_m) \longrightarrow H^{i-1}(k,\underline{Q}/\underline{Z}) \longrightarrow 0 \quad , \quad (i \geqslant 2) \quad ,$$

qui splittent (le choix d'une uniformisante de V définissant un splittage de ces suites exactes). Pour le voir, il suffit de définir pour tout $i \geqslant 2$ un homomorphisme $H^{i-1}(k,\underline{Q}/\underline{Z}) \simeq H^i(k,\underline{Z}) \longrightarrow H^i(K,\underline{G}_m)$, inverse à gauche de $H^i(K,\underline{G}_m) \longrightarrow H^{i-1}(k,\underline{Q}/\underline{Z})$. On prend le composé $H^i(k,\underline{Z}) \longrightarrow H^i(K,\underline{Z}) \longrightarrow H^i(K,\underline{G}_m)$, où la dernière flèche est celle déduite de l'homomorphisme $(\underline{Z})_K \longrightarrow \underline{G}_m$ provenant du choix d'une uniformisante de V. On a en particulier

$$Br(K) \simeq Br(k) + H^1(k,\underline{Q}/\underline{Z}) \quad ,$$

isomorphisme dû déjà à WITT (1936).