1.8. Morphismes d'espaces annelés en anneaux locaux dans les schémas affines.

Proposition (**1.8.1**). — *Soient* $(S, \mathcal{O}_S)$ *un schéma affine,* $(X, \mathcal{O}_X)$ *un espace annelé en anneaux locaux. Il y a alors une bijection canonique de l'ensemble des homomorphismes d'anneaux* $\Gamma(S, \mathcal{O}_S) \rightarrow \Gamma(X, \mathcal{O}_X)$ *sur l'ensemble des morphismes d'espaces annelés* $(\psi, \theta) : (X, \mathcal{O}_X) \rightarrow (S, \mathcal{O}_S)$ *tels que, pour tout* $x \in X$, $\theta_x^\sharp$ *soit un homomorphisme local :* $\mathcal{O}_{\psi(x)} \rightarrow \mathcal{O}_x$.

Notons d'abord que si $(X, \mathcal{O}_X)$, $(S, \mathcal{O}_S)$ sont deux espaces annelés quelconques, un morphisme (ψ, θ) de $(X, \mathcal{O}_X)$ dans $(S, \mathcal{O}_S)$ définit canoniquement un homomorphisme d'anneaux $\Gamma(\theta) : \Gamma(S, \mathcal{O}_S) \rightarrow \Gamma(X, \mathcal{O}_X)$, d'où une première application

(**1.8.1.1**) $$\rho : \mathrm{Hom}((X, \mathcal{O}_X), (S, \mathcal{O}_S)) \rightarrow \mathrm{Hom}(\Gamma(S, \mathcal{O}_S), \Gamma(X, \mathcal{O}_X)).$$

Inversement, sous les hypothèses de l'énoncé, posons $A = \Gamma(S, \mathcal{O}_S)$, et considérons un homomorphisme d'anneaux $\varphi : A \rightarrow \Gamma(X, \mathcal{O}_X)$. Pour tout $x \in X$, il est clair que l'ensemble des $f \in A$ tels que $\varphi(f)(x) = 0$ est un *idéal premier* de A, puisque $\mathcal{O}_x/\mathfrak{m}_x = \boldsymbol{k}(x)$ est un corps; c'est donc un élément de $S = \mathrm{Spec}(A)$, que nous noterons encore ${}^a\varphi(x)$. En outre, pour tout $f \in A$, on a par définition (**0**, 5.5.2) ${}^a\varphi^{-1}(D(f)) = X_f$, ce qui prouve que ${}^a\varphi$ est une application *continue* $X \rightarrow S$. Définissons ensuite un homomorphisme
$$\widetilde{\varphi} : \mathcal{O}_S \rightarrow {}^a\varphi_*(\mathcal{O}_X)$$
de $\mathcal{O}_S$-Modules; pour tout $f \in A$, on a $\Gamma(D(f), \mathcal{O}_S) = A_f$ (1.3.6); pour tout $s \in A$, on fera correspondre à $s/f \in A_f$ l'élément $(\varphi(s)|X_f)(\varphi(f)|X_f)^{-1}$ de $\Gamma(X_f, \mathcal{O}_X) = \Gamma(D(f), {}^a\varphi_*(\mathcal{O}_X))$, et on vérifie aussitôt (par passage de $D(f)$ à $D(fg)$) que cela définit bien un homomorphisme de $\mathcal{O}_S$-Modules, d'où un morphisme $({}^a\varphi, \widetilde{\varphi})$ d'espaces annelés. En outre, avec les mêmes notations, et en posant pour simplifier $y = {}^a\varphi(x)$, on voit aussitôt (**0**, 3.7.1) que l'on a $\widetilde{\varphi}_x^\sharp(s_y/f_y) = (\varphi(s)_x)(\varphi(f)_x)^{-1}$; comme la relation $s_y \in \mathfrak{m}_y$ est par définition équivalente à $\varphi(s)_x \in \mathfrak{m}_x$, on voit que $\widetilde{\varphi}_x^\sharp$ est un homomorphisme *local* $\mathcal{O}_y \rightarrow \mathcal{O}_x$, et on a ainsi défini une seconde application $\sigma : \mathrm{Hom}(\Gamma(S, \mathcal{O}_S), \Gamma(X, \mathcal{O}_X)) \rightarrow \mathfrak{L}$, où $\mathfrak{L}$ est l'ensemble des morphismes $(\psi, \theta) : (X, \mathcal{O}_X) \rightarrow (S, \mathcal{O}_S)$ tels que $\theta_x^\sharp$ soit local pour tout $x \in X$. Il reste à prouver que σ et ρ (restreint à $\mathfrak{L}$) sont réciproques l'une de l'autre; or, la définition de $\widetilde{\varphi}$ montre aussitôt que $\Gamma(\widetilde{\varphi}) = \varphi$, et par suite $\rho \circ \sigma$ est l'identité. Pour voir que $\sigma \circ \rho$ est l'identité, partons d'un morphisme $(\psi, \theta) \in \mathfrak{L}$ et soit $\varphi = \Gamma(\theta)$; l'hypothèse sur $\theta_x^\sharp$ permet de déduire de cet homomorphisme, par passage aux quotients, un monomorphisme $\theta^x : \boldsymbol{k}(\psi(x)) \rightarrow \boldsymbol{k}(x)$ tel que pour toute section $f \in A = \Gamma(S, \mathcal{O}_S)$, on ait $\theta^x(f(\psi(x))) = \varphi(f)(x)$; la relation $f(\psi(x)) = 0$ est donc équivalente à $\varphi(f)(x) = 0$, ce qui prouve déjà que ${}^a\varphi = \psi$. D'autre part, les définitions entraînent que le diagramme

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{\varphi} & \Gamma(X, \mathcal{O}_X) \\ \downarrow & & \downarrow \\ A_{\psi(x)} & \xrightarrow[\theta_x^\sharp]{} & \mathcal{O}_x \end{array}$$

est commutatif, et il en est de même du diagramme analogue où $\theta_x^\sharp$ est remplacé par $\widetilde{\varphi}_x^\sharp$, d'où $\widetilde{\varphi}_x^\sharp = \theta_x^\sharp$ (**0**, 1.2.4) et par suite $\widetilde{\varphi} = \theta$.